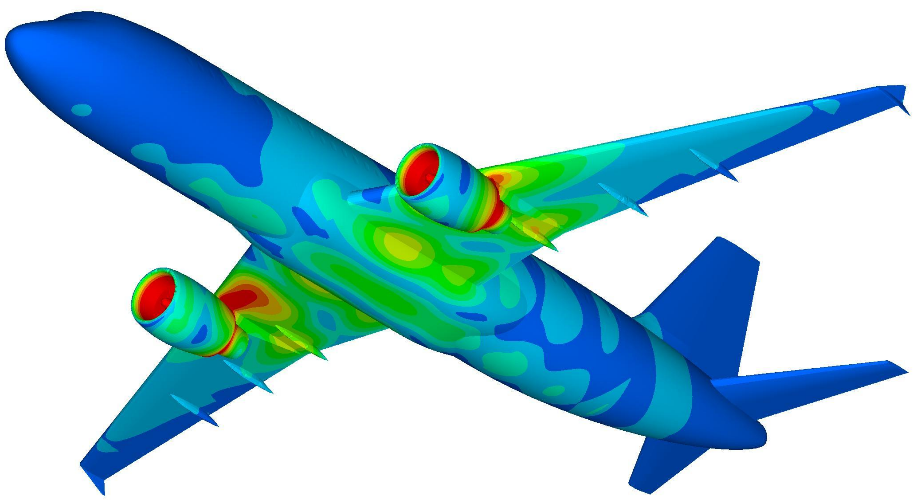
Universidad Simón Bolívar

MA-2115

RECOPILACIÓN DE EJERCICIOS RESUELTOS DE MATEMÁTICAS IV



Recopilado, resuelto y tipeado en LaTeX

José A. Da Silva R.

Febrero 2021

Índice General

Cuando muere, todo el mundo debe dejar algo detrás, decía mi abuelo. Un hijo, un libro, un cuadro, una casa, una pared levantada o un par de zapatos. O un jardín plantado. Algo que tu mano tocará de un modo especial, de modo que tu alma tenga algún sitio a donde ir cuando tú mueras, y cuando la gente mire ese árbol, o esa flor, que tú plantaste, tú estarás allí. No importa lo que hagas -decía-, en tanto que cambies algo respecto a como era antes de tocarlo, convirtiéndolo en algo que sea como tú después de que separes de ellos tus manos. La diferencia entre el hombre que se limita a cortar el césped y un auténtico jardinero está en el tacto. El cortador de césped igual podría no haber estado allí, el jardinero estará allí para siempre.

Fahrenheit 451
Ray Bradbury

1 Motivación

Mi motivación en la realización de todas las guías de ejercicios que encontrarán de mi autoría recae sobre el gran amor que le tengo a mi alma mater, la Universidad Simón Bolívar. A mediados de mi carrera universitaria sabía que no quería irme de los pasillos de la USB sin dejarle algo de mí, como ella lo había hecho conmigo.

De ahí nace este gran proyecto personal de transcribir todos esos ejercicios, notas, procedimientos, análisis, creación de programas numéricos, entre otros; que recibí de mis grandes maestros y los que son de mis propias manos, con el fin de ser un material de estudio para los venideros estudiantes en su camino por el mundo de la excelencia de la USB. A través de estos documentos, busco ayudar a mi universidad a seguir siendo un atractivo para los estudiantes regulares y aquellas personas que quieran trabajar por ella.

¿Por qué? Porque las universidades son fuente de conocimiento y, si es bien conducido este gran poder, nos separará de la barbarie e ignorancia que intentan destruir fervientemente a la primera desde hace bastante tiempo.

A pesar de las dificultades que supone estudiar en una universidad pública venezolana, me encontré en los salones de clases a increíbles compañeros que compartíamos el mismo sueño y a excelentes maestros que eternamente estaremos agradecidos con la dedicación, compromiso, tiempo y paciencia al mostrarnos el camino del conocimiento. En las dependencias administrativas, encontré un personal que, a pesar que su labor es "invisible" en nuestro día a día de estudiantes universitarios, hacen todo lo posible para que la universidad sea un sistema interconectado y funcione de la mejor manera. Y, a todo el personal de transporte y limpieza, que representan los pequeños pero importantes engranajes de un gran sistema como la USB.

Ninguno de ellos se les da una cantidad remotamente similar a lo que debería atribuírsele económicamente por su gran trabajo y esfuerzo diario y, aún así, estuvieron presente para que cada uno de nosotros tuviese un lugar en el salón de clases, en las agrupaciones estudiantiles, en la soñada graduación, entre otros. Por eso, más en estos momentos, es donde la USB necesita la ayuda de su gente.

2 Ecuaciones Diferenciales Ordinarias (EDO)

2.1 Método de Variables Separables

1. *Resuelva la siguiente ecuación diferencial, con $y = f(x)$:*

$$(x^2y - y)dx + (x^2 - 2yx^2)dy = 0$$

Solución: A primera vista, podemos factorizar ambos factores que ACOMPANAN a los diferenciales ya que nuestra primera sospecha debe ir orientada en transformarla en una ecuación diferencial (ED) de variables separables (VS):

$$(x^2y - y)dx + (x^2 - 2yx^2)dy = 0 \Longrightarrow \left[y(x^2-1)\right] dx + \left[x^2(1-2y)\right] dy = 0$$

Dividiendo por x^2 y y, estableciendo que $x^2, y \neq 0$, tenemos:

$$\Longrightarrow \left[\frac{x^2-1}{x^2}\right] dx + \left[\frac{(1-2y)}{y}\right] dy = 0$$

De la expresión anterior podemos afirmar que nuestra suposición es cierta y procedemos a resolver la ED usando la metodología de VS

$$\Longrightarrow \left(\frac{x^2-1}{x^2}\right) dx = -\left(\frac{1-2y}{y}\right) dy$$

Integrando a ambos lados de la igualdad:

$$\Longrightarrow \int 1 - \frac{1}{x^2}\, dx = -\int \frac{1}{y} - 2\, dy \Longrightarrow x + \frac{1}{x} = -\left(\ln|y| - 2y\right) + C$$

Uniendo las constantes tenemos la solución final:

$$\boxed{\ln|y| - 2y = -x - \frac{1}{x} + C}$$

2. *Resuelva la siguiente ecuación diferencial, con $y = f(x)$ y $y(0) = 2$:*

$$\frac{dy}{dx} = xy + x - 2y - 2$$

Solución: Examinemos un poco el lado derecho de la igualdad para distinguir el tipo de ED al cual nos enfrentamos:

$$\frac{dy}{dx} = xy + x - 2y - 2 = x(y+1) - 2(y+1) = (x-2)(y+1)$$

La anterior expresión permite visualizar que se trata de una ED del tipo VS. Así, aplicando el método de solución:

$$\Longrightarrow \frac{dy}{y+1} = (x-2)dx \Longrightarrow \int \frac{1}{y+1}\ dy = \int x - 2\ dx \Longrightarrow \ln|y+1| = \frac{x^2}{2} - 2x + C$$

$$\Longrightarrow \ln|y+1| = \frac{x^2}{2} - 2x + C$$

Sabiendo que $y(0) = 2$, podemos hallar la constante C:

$$\ln|2+1| = \ln|3| = \ln(3) = \frac{0^2}{2} - 2\cdot 0 + C = C \Longrightarrow C = \ln(3)$$

Así, sustituyendo en la solución de la ED tenemos la solución final:

$$\ln|y+1| = \frac{x^2}{2} - 2x + \ln(3)$$

Aplicando la función exponencial a ambos lados de la igualdad, y conservando ambas posibilidades de solución que ofrece el valor absoluto, tenemos:

$$|y+1| = e^{\frac{x^2}{2} - 2x + \ln(3)} = e^{\frac{x^2}{2} - 2x} \cdot e^{\ln(3)} = 3e^{\frac{x^2}{2} - 2x}$$

$$\Longrightarrow y + 1 = \pm 3e^{\frac{x^2}{2} - 2x} \Longrightarrow y = -1 \pm 3e^{\frac{x^2}{2} - 2x}$$

Veamos cuales de las dos posibles soluciones satisface la condición inicial de $y(0) = 2$

$$2 = -1 \pm 3e^{\frac{0^2}{2} - 2\cdot 0} = -1 \pm 3$$

Veamos que la única forma de satisfacer a la ecuación anterior es que se tome la parte positiva de la función y. De esta forma, la solución final del problema es:

$$\boxed{y = -1 + 3e^{\frac{x^2}{2} - 2x}}$$

3. *Resuelva la siguiente ecuación diferencial, con $y = f(x)$:*

$$\frac{dy}{dx}\sec(y) + \sin(x-y) = \sin(x+y)$$

Solución: Para la resolución de este ejercicio es necesaria aplicar la propiedad de la suma y resta de la función trigonométrica del seno. Así, tenemos que:

$$\left\{\begin{array}{rcl} \sin(x-y) & = & \sin(x)\cos(y)-\sin(y)\cos(x) \\ \sin(x+y) & = & \sin(x)\cos(y)+\sin(y)\cos(x) \quad \text{-} \\ \hline \sin(x+y)-\sin(x-y) & = & 2\sin(x)\cos(y) \end{array}\right.$$

De esta forma, obtenemos que:

$$\frac{dy}{dx}\sec(y)+\sin(x-y)-\sin(x+y)=0 \Longrightarrow \frac{dy}{dx}\sec(y)-2\sin(y)\cos(x)=0$$

Realizando un poco más de álgebra, tenemos que:

$$\frac{dy}{dx}\sec(y)-2\sin(y)\cos(x)=0 \Longrightarrow \frac{dy}{dx}\frac{1}{\cos(y)}=2\sin(y)\cos(x) \Longrightarrow \frac{dy}{dx}=2\sin(y)\cos(y)\cos(x) \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \frac{dy}{dx}=\sin(2y)\cos(x)$$

La anterior expresión permite visualizar que se trata de una ED del tipo VS. Así :

$$\Longrightarrow \frac{dy}{\sin(2y)}=\cos(x)dx \Longrightarrow \int \csc(2y)\ dy=\int \cos(x)\ dx \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \frac{1}{2}\ln|\csc(2y)-\cot(2y)|=\sin(x)+C \Longrightarrow \ln|\csc(2y)-\cot(2y)|=2\sin(x)+C$$

De esta forma, la solución final del problema es:

$$\boxed{\ln|\csc(2y)-\cot(2y)|=2\sin(x)+C}$$

4. *Resuelva la siguiente ecuación diferencial, con $y=f(x)$:*

$$\frac{dy}{dx}=\frac{xy+3x-y-3}{xy-2x+4y-8}$$

Solución: Si realizamos una agrupación correcta de términos podremos encontrar que se trata de una EDO de tipo VS. Entonces:

$$\frac{dy}{dx}=\frac{xy+3x-y-3}{xy-2x+4y-8}=\frac{x(y+3)-(y+3)}{x(y-2)+4(y-2)}=\frac{(x-1)(y+3)}{(x+4)(y-2)}$$

La anterior expresión permite visualizar que se trata de una ED del tipo VS. Así :

$$\Longrightarrow \frac{y-2}{y+3}dy = \frac{x-1}{x+4}dx \Longrightarrow \underbrace{\int \frac{y-2}{y+3}\,dy}_{I} = \underbrace{\int \frac{x-1}{x+4}\,dx}_{II}$$

$$I = \int \frac{y-2}{y+3}\,dy = \int \frac{y-2+3-3}{y+3}\,dy = \int \frac{y+3-5}{y+3}\,dy = \int 1 - \frac{5}{y+3}\,dy = y - 5\ln|y+3| + C_I$$

$$II = \int \frac{x-1}{x+4}\,dx = \int \frac{x-1+4-4}{x+4}\,dx = \int \frac{x+4-5}{x+4}\,dx = \int 1 - \frac{5}{x+4}\,dx = x - 5\ln|x+4| + C_{II}$$

Luego, se sustituye en la ED:

$$\int \frac{y-2}{y+3}\,dy = \int \frac{x-1}{x+4}\,dx \Longrightarrow y - 5\ln|y+3| = x - 5\ln|x+4| + C$$

De esta forma, la solución final del problema es:

$$\boxed{y - 5\ln|y+3| = x - 5\ln|x+4| + C}$$

5. *Resuelva la siguiente ecuación diferencial, con $y = f(x)$:*

$$\frac{dy}{dx} + xy^2 - 2x^2y + x^3 = 1$$

Solución: Antes de realizar cualquier procedimiento o tratamiento de la ED, simplificaremos un poco la expresión. Entonces:

$$\frac{dy}{dx} + xy^2 - 2x^2y + x^3 = 1 \Longrightarrow \frac{dy}{dx} + x(y-x)^2 = 1$$

Como se observa en la anterior expresión, la ED resultante es de tipo no lineal. Por ende, se puede sospechar que sea de tipo de VS, pero no podemos separar las variables x y y.Entonces, debemos realizar una sustitución adecuada para llevarla a la forma lineal. Así, el cambio de variable que nos llevará a un camino más corto de resolución es el siguiente, con $u = f(x)$:

$$u = y - x \Longrightarrow \frac{du}{dx} = \frac{dy}{dx} - 1 \Longrightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{du}{dx} + 1$$

De esta forma, se obtiene:

$$\frac{du}{dx} + 1 + xu^2 = 1 \Longrightarrow \frac{du}{dx} + xu^2 = 0$$

Con el cambio de variable, se puede evidenciar que se logró llevar a la ED a una de tipo de VS. Así :

$$\Longrightarrow \frac{1}{u^2}du = -xdx \Longrightarrow \int \frac{1}{u^2}\ du = -\int x\ dx \Longrightarrow -\frac{1}{u} = -\frac{1}{2}x^2 + C$$

Devolviendo el cambio de variable tenemos:

$$\frac{1}{y-x} = \frac{1}{2}x^2 + C$$

Despejando la función y:

$$y - x = \frac{1}{C + \frac{1}{2}x^2} \Longrightarrow y = x + \frac{2}{C + x^2}$$

De esta forma, la solución final del problema es:

$$\boxed{y = x + \frac{2}{C + x^2}}$$

6. *Resuelva la siguiente ecuación diferencial, con $y = f(x)$:*

$$(1 + e^x)yy' = e^y$$

2.1.1 Método de Reducción a Variables Separables

7. *Resuelva la siguiente ecuación diferencial, con $y = f(x)$:*

$$\frac{dy}{dx} = (x + y + 3)^2$$

Solución: Veamos que se trata de una ED del tipo: $\dfrac{dy}{dx} = f(ax + by + c)$, la cual es reducible a variables separables si aplicamos el cambio de variable $u = ax + by + c$.
De esta forma, se aplica el cambio de variable $u = x + y + 3$, donde $u = f(x)$. Por ende:

$$u = x + y + 3 \Longrightarrow \frac{du}{dx} = 1 + \frac{dy}{dx} \Longrightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{du}{dx} - 1$$

Sustituyendo obtenemos:

$$\frac{dy}{dx} = (x+y+3)^2 \Longrightarrow \frac{du}{dx} - 1 = u^2 \Longrightarrow \frac{du}{dx} = u^2 + 1 \Longrightarrow \frac{du}{u^2+1} = dx \Longrightarrow \int \frac{1}{u^2+1}\, du = \int dx$$

$$\Longrightarrow \arctan(u) = x + C \Longrightarrow \arctan(u) = x + C \Longrightarrow \tan(\arctan(u)) = \tan(x + C) \Longrightarrow u = \tan(x + C)$$

Devolviendo el cambio de variable tenemos que:

$$\Longrightarrow x + y + 3 = \tan(x + C) \Longrightarrow y = -(x + 3) + \tan(x + C)$$

Finalmente, la solución al problema es:

$$\boxed{y = -(x + 3) + \tan(x + C)}$$

8. *Resuelva la siguiente ecuación diferencial, con $y = f(x)$ y $y(0) = 1$:*

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sqrt{x + y}}$$

Solución: Veamos que se trata de una ED reducible a variables separables. Aplicamos el siguiente cambio de variable $u = x + y$, donde $u = f(x)$. Por ende:

$$u = x + y \Longrightarrow \frac{du}{dx} = 1 + \frac{dy}{dx} \Longrightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{du}{dx} - 1$$

Sustituyendo obtenemos:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sqrt{x+y}} \Longrightarrow \frac{du}{dx} - 1 = \frac{1}{\sqrt{u}} \Longrightarrow \frac{du}{dx} = \frac{1}{\sqrt{u}} + 1 = \frac{\sqrt{u}+1}{\sqrt{u}} \Longrightarrow \frac{\sqrt{u}}{\sqrt{u}+1}du = dx \Longrightarrow$$

$$\int \frac{\sqrt{u}}{\sqrt{u}+1}\, du = \int\, dx$$

$$\int \frac{\sqrt{u}}{\sqrt{u}+1}\, du \quad \text{CV:} \begin{cases} z = 1+\sqrt{u} \Longrightarrow \sqrt{u} = z-1 \Longrightarrow u = (z-1)^2 \\ du = 2(z-1)dz \end{cases}$$

$$\int \frac{\sqrt{u}}{\sqrt{u}+1}\, du = \int \frac{z-1}{z} 2(z-1)\, dz = 2\int \frac{(z-1)^2}{z}\, dz = 2\int \frac{z^2-2z+1}{z}\, dz = 2\int z-2+\frac{1}{z}\, dz$$

$$\Longrightarrow = 2\left(\frac{z^2}{2} - 2z + \ln|z|\right) + C_1 = z^2 - 4z + 2\ln|z| + C_1 = (1+\sqrt{u})^2 - 4(1+\sqrt{u}) + 2\ln|1+\sqrt{u}| + C_1$$

Veamos que el argumento de la función del logaritmo de base natural es siempre positivo, por lo cual puede quitarse las barras de valor absoluto. Retomando la ED, tenemos que:

$$\int \frac{\sqrt{u}}{\sqrt{u}+1}\, du = \int\, dx \Longrightarrow (1+\sqrt{u})^2 - 4(1+\sqrt{u}) + 2\ln(1+\sqrt{u}) + C_1 = x + C_2$$

Devolviendo el cambio de variable inicial $u = x+y$:

$$(1+\sqrt{x+y})^2 - 4(1+\sqrt{x+y}) + 2\ln(1+\sqrt{x+y}) = x + C$$

Hallamos el valor de la constante C, sabiendo que $y(0) = 1$:

$$(1+\sqrt{0+1})^2 - 4(1+\sqrt{0+1}) + 2\ln(1+\sqrt{0+1}) = 0 + C \Longrightarrow 4 - 8 + 2\ln(2) = C \Longrightarrow C = -4 + 2\ln(2)$$

Finalmente, la solución a la ecuación diferencial es:

$$\boxed{(1+\sqrt{x+y})^2 - 4(1+\sqrt{x+y}) + 2\ln(1+\sqrt{x+y}) = x - 4 + 2\ln(2)}$$

9. *Resuelva la siguiente ecuación diferencial, con $y = f(x)$:*

$$y' = \sin(x-y)$$

Solución: No es intuitivo dar con la forma de la ED a primera vista, pero si se dan unos minutos encontraran que es una ED de la forma $y' = f(ax + by + c)$. Por ende, es una ED reducible a variables separables si aplicamos el siguiente cambio de variable $z = x - y$, con $z = f(x)$. De esta forma, sustituyendo el CV en la ED:

$$z = x - y \Longrightarrow \frac{dz}{dx} = 1 - \frac{dy}{dx} \Longrightarrow \frac{dy}{dx} = 1 - \frac{dz}{dx}$$

$$\Longrightarrow 1 - \frac{dz}{dx} = \sin(z) \Longrightarrow \frac{dz}{dx} = 1 - \sin(z) \Longrightarrow \frac{dz}{1-\sin(z)} = dx$$

Como se puede evidenciar, logramos llevar a la ED a un tipo de variables separables. Por ende, integramos a ambos lados de igualdad:

$$\int \frac{1}{1-\sin(z)}\ dz = \int\ dx$$

$$\int \frac{1}{1-\sin(z)}\ dz \quad \text{CV:} \begin{cases} u = \tan\left(\dfrac{z}{2}\right) \Longrightarrow dz = \dfrac{2}{1+u^2}du \\ \sin(z) = \dfrac{2u}{1+u^2} \quad \cos(z) = \dfrac{1-u^2}{1+u^2} \end{cases}$$

$$\int \frac{1}{1-\sin(z)}\ dz = \int \frac{1}{1 - \dfrac{2u}{1+u^2}} \frac{2}{1+u^2}\ du = \int \frac{2}{1+u^2-2u}\ du = 2\int \frac{1}{(u-1)^2}\ du = -\frac{2}{u-1} + C$$

$$\Longrightarrow = -\frac{2}{\tan\left(\dfrac{z}{2}\right) - 1} + C$$

Así, podemos resolver las integrales de ambos lados:

$$\int \frac{1}{1-\sin(z)}\ dz = \int\ dx \Longrightarrow -\frac{2}{\tan\left(\dfrac{z}{2}\right) - 1} = x + C$$

Devolviendo el cambio de variable $z = x - y$, obtenemos:

$$-\frac{2}{\tan\left(\dfrac{x-y}{2}\right) - 1} = x + C$$

Despejando la variable y:

$$\Longrightarrow -\frac{2}{x+C} = \tan\left(\frac{x-y}{2}\right) - 1 \Longrightarrow \tan\left(\frac{x-y}{2}\right) = 1 - \frac{2}{x+C} \Longrightarrow \frac{x-y}{2} = \arctan\left(1 - \frac{2}{x+C}\right)$$

Finalmente, la solución al problema es:

$$\boxed{y = x - 2\arctan\left(1 - \frac{2}{x+C}\right)}$$

10. *Resuelva la siguiente ecuación diferencial, con $y = f(x)$:*

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\cos(x+y+1)}{1-\cos(x+y+1)}$$

Solución: Veamos que se trata de una ED reducible a variables separables. Así, aplicamos el cambio de variable $u = x+y+1$, donde $u = f(x)$. Luego:

$$u = x+y+1 \Longrightarrow \frac{du}{dx} = 1 + \frac{dy}{dx} \Longrightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{du}{dx} - 1$$

Sustituyendo obtenemos:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\cos(x+y+1)}{1-\cos(x+y+1)} \Longrightarrow \frac{du}{dx} - 1 = \frac{\cos(u)}{1-\cos(u)} \Longrightarrow \frac{du}{dx} = \frac{\cos(u)}{1-\cos(u)} + 1 = \frac{1}{1-\cos(u)} \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \frac{du}{dx} = \frac{1}{1-\cos(u)}$$

De la expresión anterior se ve claramente que se trata de una ED de tipo VS. Por ende, aplicando la metodología de solución:

$$\frac{du}{dx} = \frac{1}{1-\cos(u)} \Longrightarrow (1-\cos(u))du = dx \Longrightarrow \int 1-\cos(u)\ du = \int dx \Longrightarrow u - \sin(u) = x + C$$

Devolviendo el cambio de variable tenemos que:

$$\Longrightarrow x+y+1-\sin(x+y+1) = x + C \Longrightarrow y - \sin(x+y+1) = C$$

Finalmente, la solución al problema es:

$$\boxed{y - \sin(x+y+1) = C}$$

2.2 EDO Lineales de Primer Orden

2.2.1 Método del Factor Integrante

11. *Resuelva la siguiente ecuación diferencial, con $y = f(x)$:*

$$xdy - ydx - (1 - x^2)dx = 0$$

Solución: Realizamos manipulaciones algebráicas para detectar el tipo de ED al que nos enfrentamos:

$$xdy - ydx - (1 - x^2)dx = 0 \Longrightarrow x\frac{dy}{dx} - y - (1 - x^2) = 0 \Longrightarrow x\frac{dy}{dx} - y = 1 - x^2$$

Si $x = 0$, entonces tenemos:

$$0\frac{dy}{dx} - y = 1 - 0^2 \Longrightarrow -y = 1 \Longrightarrow y(0) = -1 \quad \text{Solución Particular}$$

Ahora, si $x \neq 0$, tendremos que:

$$\frac{dy}{dx} - \frac{1}{x}y = \frac{1 - x^2}{x}$$

Veamos que la ED es del tipo del factor integrante, la cual tiene la forma $\dfrac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x)$ con $P(x) = -\dfrac{1}{x}$ y $Q(x) = \dfrac{1 - x^2}{x}$. Entonces, aplicamos el método del factor integrante:

$$\mu = exp\left(\int P(x)\ dx\right) = exp\left(\int \left[-\frac{1}{x}\right]\ dx\right) = exp\left(-\ln|x| + C\right) = \frac{1}{exp(\ln|x| + C)} = \frac{1}{|x|e^C} = \pm\frac{C}{x}$$

Veamos que la constante de integración y la dualidad del signo desaparecen ya que se multiplica a toda la ED por el factor integrante. Así:

$$\frac{dy}{dx} - \frac{1}{x}y = \frac{1 - x^2}{x} \Longrightarrow \mu\left(\frac{dy}{dx} - \frac{1}{x}y\right) = \mu\left(\frac{1 - x^2}{x}\right) \Longrightarrow \pm\frac{C}{x}\left(\frac{dy}{dx} - \frac{1}{x}y\right) = \pm\frac{C}{x}\left(\frac{1 - x^2}{x}\right)$$

Simplificando, tenemos:

$$\frac{1}{x}\frac{dy}{dx} - \frac{1}{x^2}y = \frac{1 - x^2}{x^2} \Longrightarrow \frac{d}{dx}\left(\frac{y}{x}\right) = \frac{1}{x^2} - 1$$

Integrando a ambos lados con respecto a x:

$$\int \frac{d}{dx}\left(\frac{y}{x}\right)\ dx = \int \frac{1}{x^2} - 1\ dx \Longrightarrow \frac{y}{x} = -\frac{1}{x} - x + C$$

Despejando la función y:

$$y = -1 - x^2 + Cx = -x^2 + Cx - 1$$

Veamos que $y(0) = -0 + 0 - 1 = -1$, por ende satisface la solución particular encontrada anteriormente. Por lo tanto, la solución final al problema es:

$$\boxed{y = -x^2 + Cx - 1}$$

12. *Resuelva la siguiente ecuación diferencial, con $y = f(x)$ y $y(\pi) = 0$:*

$$y' + \frac{1}{x}y = \sin(x)$$

Solución: Notamos que se trata de una ED es del tipo del factor integrante ya que cumple con la forma $\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x)$ con $P(x) = \frac{1}{x}$ y $Q(x) = \sin(x)$. Así, calculamos el factor integrante μ:

$$\mu = exp\left(\int P(x)\ dx\right) = exp\left(\int \left[\frac{1}{x}\right]\ dx\right) = exp\left(\ln|x|\right) = x$$

Entonces, multiplicando ambos lados de la igualdad por el factor integrante tenemos que:

$$\frac{dy}{dx} + \frac{1}{x}y = \sin(x) \Longrightarrow x\left(\frac{dy}{dx} + \frac{1}{x}y\right) = x\sin(x) \Longrightarrow x\frac{dy}{dx} + y = x\sin(x) \Longrightarrow \frac{d}{dx}(xy) = x\sin(x)$$

Integrando a ambos lados de la igualdad con respecto a la variable x, tenemos que:

$$\int \frac{d}{dx}(xy)\ dx = \int x\sin(x)\ dx$$

$$\int x\sin(x)\ dx \quad \text{Integral por partes (IPP):} \begin{cases} u = x \Longrightarrow du = dx \\ dv = \sin(x)\,dx \Longrightarrow v = -\cos(x) \end{cases}$$

$$\int x\sin(x)\ du = -x\cos(x) + \int \cos(x)\ dx = -x\cos(x) + \sin(x) + C$$

Así, sustituyendo en la igualdad anterior:

$$\int \frac{d}{dx}(xy)\ dx = \int x\sin(x)\ dx \Longrightarrow xy = -x\cos(x) + \sin(x) + C$$

Despejando a la función y:

$$\Longrightarrow y(x) = -\cos(x) + \frac{\sin(x)}{x} + \frac{C}{x}$$

Sabiendo que $y(\pi) = 0$, podemos hallar el valor de la constante C:

$$0 = -(-1) + 0 + \frac{C}{\pi} = 1 + \frac{C}{\pi} \Longrightarrow C = -\pi$$

Finalmente, la solución al problema es:

$$\boxed{y(x) = -\cos(x) + \frac{\sin(x)}{x} - \frac{\pi}{x}}$$

13. *Resuelva la siguiente ecuación diferencial, con $y = f(x)$:*

$$y' - \frac{2}{x-1}y = (x-1)^3$$

Solución: Notamos que se trata de una ED es del tipo del factor integrante ya que cumple con la forma $\dfrac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x)$ con $P(x) = -\dfrac{2}{x-1}$ y $Q(x) = (x-1)^3$. Así, calculamos el factor integrante μ:

$$\mu = exp\left(\int P(x)\ dx\right) = exp\left(\int\left[-\frac{2}{x-1}\right]\ dx\right) = exp\left(-2\int\left[\frac{1}{x-1}\right]\ dx\right) = exp\left(-2\ln|x-1|\right)$$

$$\Longrightarrow = exp\left(\ln|x-1|^{-2}\right) = (x-1)^{-2}$$

Entonces, multiplicando ambos lados de la igualdad por el factor integrante tenemos que:

$$\frac{dy}{dx} - \frac{2}{x-1}y = (x-1)^3 \Longrightarrow (x-1)^{-2}\left(\frac{dy}{dx} - \frac{2}{x-1}y\right) = (x-1)^{-2}(x-1)^3$$

$$\Longrightarrow = (x-1)^{-2}\frac{dy}{dx} - 2(x-1)^{-3}y = (x-1) \Longrightarrow \frac{d}{dx}\left[(x-1)^{-2}y\right] = (x-1)$$

Integrando a ambos lados de la igualdad con respecto a la variable x:

$$\int \frac{d}{dx}\left[(x-1)^{-2}y\right]\ dx = \int (x-1)\ dx \Longrightarrow (x-1)^{-2}y = \frac{x^2}{2} - x + C$$

Despejando la función $y(x)$:

$$\Longrightarrow y(x) = \left[(x-1)^2\right]\left[\frac{x^2}{2} - x + C\right] = \frac{1}{2}(x^2-x)^2 - x(x-1)^2 + C(x-1)^2$$

Finalmente, la solución al problema es:

$$\boxed{y(x) = \frac{1}{2}(x^2-x)^2 - x(x-1)^2 + C(x-1)^2}$$

14. *Resuelva la siguiente ecuación diferencial, con $r = f(\theta)$:*

$$\frac{dr}{d\theta} + r\tan(\theta) = \sec(\theta)$$

Solución: Notamos que se trata de una ED del tipo del factor integrante. Así, calculamos el factor integrante μ:

$$\mu = exp\left(\int \tan(\theta)\ d\theta\right) = exp\left(\ln|\sec(\theta)|\right) = \sec(\theta)$$

Entonces, multiplicando ambos lados de la igualdad por el factor integrante tenemos que:

$$\frac{dr}{d\theta} + r\tan(\theta) = \sec(\theta) \Longrightarrow \sec(\theta)\frac{dr}{d\theta} + r\tan(\theta)\sec(\theta) = \sec^2(\theta) \Longrightarrow \frac{d}{d\theta}\left[\sec(\theta)r\right] = \sec^2(\theta)$$

Integrando a ambos lados de la igualdad con respecto a la variable θ:

$$\int \frac{d}{d\theta}\left[\sec(\theta)r\right]\ d\theta = \int \sec^2(\theta)\ d\theta \Longrightarrow \sec(\theta)r = \tan(\theta) + C$$

Despejando la función $r(\theta)$:

$$\Longrightarrow r(\theta) = \frac{\tan(\theta)}{\sec(\theta)} + \frac{C}{\sec(\theta)} = \sin(\theta) + C\cdot\cos(\theta)$$

Finalmente, la solución al problema es:

$$\boxed{r(\theta) = \sin(\theta) + C\cos(\theta)}$$

2.2.2 Ecuación de Bernoulli

15. *Resuelva la siguiente ecuación diferencial, con $y = f(x)$ y $x > 0$:*

$$xy' + y = y^2 \ln(x)$$

Solución: Tratemos de llevar la ED a una del tipo de factor integrante:

$$xy' + y = y^2 \ln(x) \Longrightarrow \frac{dy}{dx} + \frac{1}{x}y = \frac{\ln(x)}{x}y^2$$

Veamos que se trata de una ED del tipo de Bernoulli, la cual tiene la forma $\frac{dy}{dx} + P(x)y = y^n Q(x)$, con $n \neq 0, 1$. Por ende, aplicamos el cambio de variable $\omega = y^{1-(2)} = y^{-1} \Longrightarrow \omega = y^{-1}$. Así, procedemos a hallar la derivada de la función ω con respecto a la variable x.

Es importante establecer que ω es función de y, es decir $\omega = f(y)$. Por ende, debemos aplicar regla de la cadena al momento de derivar a ω. Así, despejamos $\frac{dy}{dx}$:

$$\frac{d\omega}{dx} = \frac{d\omega}{dy}\frac{dy}{dx} = -y^{-2}\frac{dy}{dx} \Longrightarrow \frac{dy}{dx} = -y^2\frac{d\omega}{dx}$$

Sustituyendo en la ED tenemos que:

$$\frac{dy}{dx} + \frac{1}{x}y = \frac{\ln(x)}{x}y^2 \Longrightarrow -y^2\frac{d\omega}{dx} + \frac{1}{x}y = \frac{\ln(x)}{x}y^2$$

Dividiendo a ambos lados de la igualdad por $-y^2$ y sustituyendo el cambio de variable $\omega = y^{-1}$:

$$\Longrightarrow \frac{d\omega}{dx} - \frac{1}{x}y^{-1} = -\frac{\ln(x)}{x} \Longrightarrow \frac{d\omega}{dx} - \frac{1}{x}\omega = -\frac{\ln(x)}{x}$$

Ahora nos encontramos con una nueva ED del tipo de factor integrante, ya que cumple con la forma $\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x)$ con $P(x) = -\frac{1}{x}$ y $Q(x) = -\frac{\ln(x)}{x}$. Así, calculamos el factor integrante μ:

$$\mu = exp\left(\int P(x)\ dx\right) = exp\left(\int \left[-\frac{1}{x}\right]\ dx\right) = exp\left(-\ln|x|\right) = \frac{1}{x}$$

Entonces, multiplicando ambos lados de la igualdad por el factor integrante tenemos que:

$$\frac{d\omega}{dx} - \frac{1}{x}\omega = -\frac{\ln(x)}{x} \Longrightarrow \frac{1}{x}\left(\frac{d\omega}{dx} - \frac{1}{x}\omega\right) = -\frac{1}{x}\frac{\ln(x)}{x} \Longrightarrow \frac{1}{x}\frac{d\omega}{dx} - \frac{1}{x^2}\omega = -\frac{\ln(x)}{x^2}$$

$$\Longrightarrow \frac{d}{dx}\left[\frac{\omega}{x}\right] = -\frac{\ln(x)}{x^2}$$

Integrando a ambos lados de la igualdad con respecto a la variable x:

$$\int \frac{d}{dx}\left[\frac{\omega}{x}\right]\, dx = \int -\frac{\ln(x)}{x^2}\, dx$$

$$\int \frac{\ln(x)}{x^2}\, dx \quad \text{Integral por partes (IPP):} \begin{cases} u = \ln(x) \Longrightarrow du = \dfrac{1}{x}dx \\ dv = \dfrac{1}{x^2}\, dx \Longrightarrow v = -\dfrac{1}{x} \end{cases}$$

$$\int \frac{\ln(x)}{x^2}\, dx = -\frac{\ln(x)}{x} + \int \frac{1}{x^2}\, dx = -\frac{\ln(x)}{x} - \frac{1}{x} + C = -\frac{\ln(x)+1}{x} + C$$

Así, sustituyendo en la igualdad anterior, tenemos que:

$$\int \frac{d}{dx}\left[\frac{\omega}{x}\right]\, dx = \int -\frac{\ln(x)}{x^2}\, dx \Longrightarrow \frac{\omega}{x} = -\left[-\frac{\ln(x)+1}{x} + C\right] \Longrightarrow \omega = \ln(x) + 1 + \frac{C}{x}$$

Devolviendo el cambio de variable $\omega = y^{-1}$:

$$\Longrightarrow y^{-1} = \ln(x) + 1 + Cx \Longrightarrow y = \frac{1}{\ln(x) + 1 + Cx}$$

Finalmente, la solución al problema es:

$$\boxed{y(x) = \frac{1}{\ln(x) + 1 + Cx}}$$

16. *Resuelva la siguiente ecuación diferencial, con $y = f(x)$:*

$$y' = \frac{y^2 + 2xy}{x^2}$$

Solución: Veamos que esta ED puede ser tratada de dos formas distintas: como una ED de tipo Bernoulli o una ED homogenéa. Busquemos la solución para la primera de estas formas. Separando la fracción del lado derecho obtenemos la siguiente expresión:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y^2 + 2xy}{x^2} = \frac{y^2}{x^2} + 2\frac{y}{x}$$

Reorganizando la expresión para hacerla coincidir con la ED tipo Bernoulli:

$$\frac{dy}{dx} - 2\frac{1}{x}y = \frac{1}{x^2}y^2$$

Tiene la forma de $\dfrac{dy}{dx} + P(x)y = y^n Q(x)$, con $n \neq 0, 1$. Por ende, aplicamos el cambio de variable $\omega = y^{1-(2)} = y^{-1} \Longrightarrow \omega = y^{-1}$. Así, procedemos a hallar la derivada de la función ω con respecto a la variable x.

$$\frac{d\omega}{dx} = \frac{d\omega}{dy}\frac{dy}{dx} = -y^{-2}\frac{dy}{dx} \Longrightarrow \frac{dy}{dx} = -y^2\frac{d\omega}{dx}$$

Sustituyendo en la ED obtenemos:

$$\Longrightarrow -y^2\frac{d\omega}{dx} - 2\frac{1}{x}y = \frac{1}{x^2}y^2$$

Diviendo toda la igualdad por $-y^2$ y sustituyendo el CV $\omega = y^{-1}$, obtenemos la siguiente igualdad:

$$\Longrightarrow \frac{d\omega}{dx} + \frac{2}{x}\frac{1}{y} = -\frac{1}{x^2} \Longrightarrow \frac{d\omega}{dx} + \frac{2}{x}\omega = -\frac{1}{x^2}$$

Veamos que se trata de una ED de tipo factor integrante. Por ende, hallamos el factor integrante μ:

$$\mu = exp\left(\int \left[\frac{2}{x}\right]\ dx\right) = exp\left(2\ln|x|\right) = x^2$$

Luego, multiplicando a ambos lados de la igualdad por el factor integrante obtenemos la siguiente expresión:

$$\Longrightarrow x^2\left(\frac{d\omega}{dx} + \frac{2}{x}\omega\right) = -x^2\frac{1}{x^2} \Longrightarrow x^2\frac{d\omega}{dx} + 2x\omega = -1 \Longrightarrow \frac{d}{dx}\left[\omega x^2\right] = -1$$

Integrando a ambos lados de la igualdad con respecto a la variable x, tenemos:

$$\int \frac{d}{dx}\left[x^2\omega\right]\ dx = \int -\ dx \Longrightarrow x^2\omega = -x + C$$

Despejando la variable ω, tenemos:

 joseadasilvar13@gmail.com

$$\Longrightarrow \omega = -\frac{1}{x} + \frac{C}{x^2} = \frac{C-x}{x^2}$$

Finalmente, devolviendo el CV inicial $\omega = y^{-1}$ obtenemos la solución al problema:

$$\boxed{y = \frac{x^2}{C-x}}$$

Por otra parte, si hubiesemos tratado a la ED de tipo homogénea, tendríamos el siguiente resultado:

$$\frac{dy}{dx} = \left(\frac{y}{x}\right)^2 + 2\left(\frac{y}{x}\right) = F\left(\frac{y}{x}\right)$$

Por lo tanto, aplicamos el siguiente cambio de variable, con $z = f(x)$:

$$z = \frac{y}{x} \Longrightarrow y = zx \Longrightarrow \frac{dy}{dx} = x\frac{dz}{dx} + z$$

Sustituyendo en la expresión anterior tenemos que:

$$\Longrightarrow x\frac{dz}{dx} + z = z^2 + 2z \Longrightarrow x\frac{dz}{dx} = z^2 + z \Longrightarrow \frac{dx}{x} = \frac{dz}{z^2+z}$$

Nos encontramos con una ED de tipo de variables separables. Por ende, integramos a ambos lados de la igualdad:

$$\int \frac{1}{x}\ dx = \int \frac{1}{z^2+z}\ dz$$

$$\int \frac{1}{z^2+z}\ dz = \int \frac{1}{z(z+1)}\ dz = \int \frac{1}{z} - \frac{1}{z+1}\ dz = \ln|z| - \ln|z+1| + C = \ln\left|\frac{z}{z+1}\right| + C$$

$$\Longrightarrow \ln|x| + C = \ln\left|\frac{z}{z+1}\right|$$

Realizaremos ciertas manipulaciones algebráicas para obtener la misma solución final obtenida por el método de Bernoulli. Escribiremos a la constante C como $C = \ln|K|$, lo cual sigue siendo válido ya que el logaritmo de un número real (de cualquier base) es una constante. Así:

$$\ln|x| + C = \ln\left|\frac{z}{z+1}\right| \Longrightarrow \ln|Kx| = \ln\left|\frac{z}{z+1}\right|$$

Ahora, podemos aplicar a ambos lados de la igualdad la función inversa, que no es más que la función exponencial. Así, tenemos que:

$$\Longrightarrow Kx = \frac{z}{z+1}$$

Devolviendo el cambio de variable realizado $z = \dfrac{y}{x}$, obtenemos:

$$\Longrightarrow Kx = \frac{y/x}{y/x+1} = \frac{y/x}{(y+x)/x} = \frac{y}{y+x} = \frac{1}{1+x/y} \Longrightarrow 1 + \frac{x}{y} = \frac{1}{Kx} \Longrightarrow \frac{x}{y} = \frac{1-Kx}{Kx} \Longrightarrow$$

$$\frac{y}{x} = \frac{Kx}{1-Kx} \Longrightarrow y = \frac{Kx^2}{1-Kx}$$

Si dividimos entre la constante K al numerador y denominador de la fracción, tenemos:

$$y = \frac{x^2}{1/K - x}$$

Pero, el inverso de una constante es otra constante. Por lo tanto, llamando a $1/K = A$, obtenemos la solución final:

$$\boxed{y = \frac{x^2}{A-x}}$$

17. *Resuelva la siguiente ecuación diferencial, con $y = f(x)$:*

$$y' - y = e^{2x}y^3$$

Solución: De entrada, notamos que se trata de una ED de tipo Bernoulli. Por ende, aplicamos el cambio de variable $\omega = y^{1-(3)} = y^{-2} \Longrightarrow \omega = y^{-2}$. Así, procedemos a hallar la derivada de la función ω con respecto a la variable x.

$$\frac{d\omega}{dx} = \frac{d\omega}{dy}\frac{dy}{dx} = -2y^{-3}\frac{dy}{dx} \Longrightarrow \frac{dy}{dx} = -\frac{1}{2}y^3\frac{d\omega}{dx}$$

Sustituyendo en la ED obtenemos:

$$\Longrightarrow -\frac{1}{2}y^3\frac{d\omega}{dx} - y = e^{2x}y^3$$

Diviendo toda la igualdad por $-\frac{1}{2}y^3$ y sustituyendo el CV $\omega = y^{-2}$, obtemos la siguiente igualdad:

$$\Longrightarrow \frac{d\omega}{dx} + 2\frac{1}{y^2} = -2e^{2x} \Longrightarrow \frac{d\omega}{dx} + 2\omega = -2e^{2x}$$

Hallamos el factor integrante μ:

$$\mu = exp\left(\int 2\ dx\right) = e^{2x}$$

Luego, multiplicando a ambos lados de la igualdad por el factor integrante obtenemos la siguiente expresión:

$$\Longrightarrow e^{2x}\left(\frac{d\omega}{dx} + 2\omega\right) = -2e^{2x}e^{2x} \Longrightarrow e^{2x}\frac{d\omega}{dx} + 2e^{2x}\omega = -2e^{4x} \Longrightarrow \frac{d}{dx}\left[\omega e^{2x}\right] = -2e^{4x}$$

Integrando a ambos lados de la igualdad con respecto a la variable x, tenemos:

$$\int \frac{d}{dx}\left[e^{2x}\omega\right]\ dx = \int -2e^{4x}\ dx \Longrightarrow e^{2x}\omega = -\frac{1}{2}e^{4x} + C$$

Despejando la variable ω, tenemos:

$$\Longrightarrow \omega = -\frac{1}{2}e^{2x} + Ce^{-2x}$$

Finalmente, devolviendo el CV inicial $\omega = y^{-2}$ obtenemos la solución al problema:

$$\frac{1}{y^2} = -\frac{1}{2}e^{2x} + Ce^{-2x} \Longrightarrow y^2 = \frac{1}{-\frac{1}{2}e^{2x} + Ce^{-2x}} \Longrightarrow y = \pm\sqrt{\frac{2}{Ce^{-2x} - e^{2x}}}$$

$$\boxed{y = \pm\sqrt{\frac{2}{Ce^{-2x} - e^{2x}}}}$$

18. *Resuelva la siguiente ecuación diferencial, con $y = f(x)$:*

$$xdy - (y + xy^2(1 + \ln(x)))dx = 0$$

Solución: Debemos realizar una manipulación algebráica para poder esclarecer el tipo de ED al cual nos enfrentamos. Estableciendo que $x \neq 0$:

$$xdy-(y+xy^2(1+\ln(x)))dx = 0 \Longrightarrow x\frac{dy}{dx}-(y+xy^2(1+\ln(x))) = 0 \Longrightarrow \frac{dy}{dx}-\Big(\frac{y}{x}+y^2(1+\ln(x))\Big) = 0$$

$$\Longrightarrow \frac{dy}{dx}-\frac{1}{x}y = y^2(1+\ln(x))$$

De la última expresión se visualiza que se trata de una ED de tipo Bernoulli. Por ende, aplicamos el cambio de variable $\omega = y^{1-(2)} = y^{-1} \Longrightarrow \omega = y^{-1}$. Así, procedemos a hallar la derivada de la función ω con respecto a la variable x.

$$\frac{d\omega}{dx} = \frac{d\omega}{dy}\frac{dy}{dx} = -y^{-2}\frac{dy}{dx} \Longrightarrow \frac{dy}{dx} = -y^2\frac{d\omega}{dx}$$

Sustituyendo en la ED obtenemos:

$$\Longrightarrow -y^2\frac{d\omega}{dx}-\frac{1}{x}y = y^2(1+\ln(x))$$

Diviendo toda la igualdad por $-y^2$ y sustituyendo el CV $\omega = y^{-1}$, obtenemos la siguiente igualdad:

$$\Longrightarrow \frac{d\omega}{dx}+\frac{1}{x}\frac{1}{y} = -(1+\ln(x)) \Longrightarrow \frac{d\omega}{dx}+\frac{\omega}{x} = -(1+\ln(x))$$

Hallamos el factor integrante μ:

$$\mu = exp\left(\int \frac{1}{x}\, dx\right) = x$$

Luego, multiplicando a ambos lados de la igualdad por el factor integrante obtenemos la siguiente expresión:

$$\Longrightarrow x\left(\frac{d\omega}{dx}+\frac{\omega}{x}\right) = -x(1+\ln(x)) \Longrightarrow x\frac{d\omega}{dx}+\omega = -x-x\ln(x) \Longrightarrow \frac{d}{dx}\left[\omega x\right] = -x-x\ln(x)$$

Integrando a ambos lados de la igualdad con respecto a la variable x, tenemos:

$$\int \frac{d}{dx}\left[x\omega\right]\ dx = -\int x+x\ln(x)\ dx$$

$$\int x + x\ln(x)\ dx = \underbrace{\int x\ dx}_{I} + \underbrace{\int x\ln(x)\ dx}_{II}$$

$$I = \int x\ dx = \frac{x^2}{2} + C_1$$

$$II = \int x\ln(x)\ dx \Longrightarrow \begin{cases} u = \ln(x) \Longrightarrow du = \dfrac{1}{x}dx \\ \\ dv = xdx \Longrightarrow v = \dfrac{x^2}{2} \end{cases}$$

$$II = \frac{1}{2}x^2\ln(x) - \frac{1}{2}\int x\ dx = \frac{1}{2}x^2\ln(x) - \frac{1}{4}x^2 + C_2$$

$$\int \frac{d}{dx}\left[x\omega\right]\ dx = -\int x + x\ln(x)\ dx \Longrightarrow x\omega = -\left(\frac{x^2}{2} + \frac{1}{2}x^2\ln(x) - \frac{1}{4}x^2\right) + C$$

$$\Longrightarrow x\omega = -\left(\frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{2}x^2\ln(x)\right) + C$$

Despejando la variable ω, tenemos:

$$\Longrightarrow \omega = -\left(\frac{1}{4}x + \frac{1}{2}x\ln(x)\right) + C\frac{1}{x}$$

Finalmente, devolviendo el CV inicial $\omega = y^{-1}$ obtenemos la solución al problema:

$$\frac{1}{y} = -\left(\frac{1}{4}x + \frac{1}{2}x\ln(x)\right) + C\frac{1}{x} \Longrightarrow y = \frac{1}{-\left(\frac{1}{4}x + \frac{1}{2}x\ln(x)\right) + C\frac{1}{x}} = \frac{4x}{C - x^2\left(1 + 2\ln(x)\right)}$$

$$\boxed{y = \frac{4x}{C - x^2\left(1 + 2\ln(x)\right)}}$$

2.3 EDO Homogéneas

19. *Resuelva la siguiente ecuación diferencial, con $y = f(x)$:*

$$2xyy' \cos^2(y/x) = 2y^2 \cos^2(y/x) + xy \sin^2(y/x)$$

Solución: Debemos realizar un poco de manipulación algebráica para encontrar una expresión más sencilla que permita visualizar la forma de la EDO. Asumiendo que $x, y \neq 0$, aislamos la derivada de la función y

$$2xyy' \cos^2(y/x) = 2y^2 \cos^2(y/x) + xy \sin^2(y/x) \Longrightarrow y' = \frac{2y^2 \cos^2(y/x)}{2xy \cos^2(y/x)} + \frac{xy \sin^2(y/x)}{2xy \cos^2(y/x)}$$

$$\Longrightarrow y' = \frac{y}{x} + \frac{1}{2} \tan^2(y/x)$$

De la última expresión se observa que la EDO resulta del tipo homogénea. Para verificarlo, toda EDO homogénea debe verificar la siguiente igualdad, sabiendo que $F(x, y) = y'$

$$F(\lambda x, \lambda y) = F(x, y)$$

Así:

$$F(\lambda x, \lambda y) = \frac{\lambda y}{\lambda x} + \frac{1}{2} \tan^2(\lambda y/\lambda x) = \frac{y}{x} + \frac{1}{2} \tan^2(y/x) = F(x, y)$$

Por lo tanto, se trata de una EDO homogénea. De esta forma, aplicamos el siguiente cambio de variable con $u = f(x)$:

$$y = ux \Longrightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}(ux) = \frac{du}{dx}x + u$$

Ahora, sustituyendo en la ED tenemos:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x} + \frac{1}{2} \tan^2(y/x) \Longrightarrow \frac{du}{dx}x + u = u + \frac{1}{2} \tan^2(u) \Longrightarrow \frac{du}{dx}x = \frac{1}{2} \tan^2(u)$$

$$\Longrightarrow \cot^2(u)du = \frac{1}{2x}dx$$

Veamos que ahora tenemos que resolver una ED de variables separables. Así, integramos a ambos lados de la igualdad:

$$\int \cot^2(u)\ du = \int \frac{1}{2x}\ dx$$

$$\int \cot^2(u)\ du = \int \frac{\cos^2(u)}{\sin^2(u)}\ du = \int \frac{1-\sin^2(u)}{\sin^2(u)}\ du = \int \frac{1}{\sin^2(u)} - 1\ du = \int \csc^2(u) - 1\ du =$$

$$\Longrightarrow = -\cot(u) - u + C_1$$

$$\int \frac{1}{2x}\ dx = \frac{1}{2}\ln|x| + C_2$$

De esta forma, sustituyendo en la expresión anterior, podremos hallar la solución a la ED:

$$\int \cot^2(u)\ du = \int \frac{1}{2x}\ dx \Longrightarrow -\cot(u) - u = \frac{1}{2}\ln|Cx| \Longrightarrow \cot(u) + u = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{C}{x}\right|$$

Devolviendo el cambio de variable inicial:

$$u = \frac{y}{x}$$

$$\Longrightarrow \cot(y/x) + y/x = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{C}{x}\right|$$

Finalmente, la solución al problema es:

$$\boxed{\cot(y/x) + y/x = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{C}{x}\right|}$$

20. *Resuelva la siguiente ecuación diferencial, con $y = f(x)$:*

$$2xy'(x^2 + y^2) = y(y^2 + 2x^2)$$

Solución: Asumiendo que $x \neq 0$, aislamos la derivada de la función y

$$2xy'(x^2 + y^2) = y(y^2 + 2x^2) \Longrightarrow y' = \frac{y(y^2 + 2x^2)}{2x(x^2 + y^2)}$$

Tanto el numerador como el denominador tienen grados iguales; por ende, la ED es candidata a ser tipo homogénea. Para verificarlo, debe satisfacerse la siguiente igualdad, sabiendo que

$F(x, y) = y'$

$$F(\lambda x, \lambda y) = F(x, y)$$

Así:

$$F(\lambda x, \lambda y) = \frac{\lambda y((\lambda y)^2 + 2(\lambda x)^2)}{2\lambda x((\lambda x)^2 + (\lambda y)^2)} = \frac{\lambda^3 y(y^2 + 2x^2)}{\lambda^3 2x(x^2 + y^2)} = F(x, y)$$

Comprobado que se trata de una EDO homogénea, procedemos a aplicar el siguiente cambio de variable con $u = f(x)$:

$$y = ux \Longrightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}(ux) = \frac{du}{dx}x + u$$

Ahora, sustituyendo en la ED tenemos:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y(y^2 + 2x^2)}{2x(x^2 + y^2)} \Longrightarrow \frac{du}{dx}x + u = \frac{ux((ux)^2 + 2x^2)}{2x(x^2 + (ux)^2)} = \frac{ux^3(u^2 + 2)}{2x^3(1 + u^2)} = \frac{u(u^2 + 2)}{2(1 + u^2)}$$

$$\Longrightarrow \frac{du}{dx}x + u = \frac{u(u^2 + 2)}{2(1 + u^2)} \Longrightarrow \frac{du}{dx}x = \frac{u(u^2 + 2)}{2(1 + u^2)} - u = \frac{u^3 + 2u - 2u - 2u^3}{2(1 + u^2)} = -\frac{u^3}{2(1 + u^2)}$$

$$\Longrightarrow \frac{du}{dx}x = -\frac{u^3}{2(1 + u^2)} \Longrightarrow \frac{1 + u^2}{u^3}du = -\frac{1}{2x}dx$$

Veamos que ahora tenemos que resolver una ED de variables separables. Así, integramos a ambos lados de la igualdad:

$$\int \frac{1 + u^2}{u^3}\ du = -\int \frac{1}{2x}\ dx$$

$$\int \frac{1 + u^2}{u^3}\ du = \int \frac{1}{u^3} + \frac{1}{u}\ du = -\frac{1}{2}u^{-2} + \ln|u| + C_1$$

$$\int \frac{1}{2x}\ dx = \frac{1}{2}\ln|x| + C_2$$

De esta forma, sustituyendo en la expresión anterior, podremos hallar la solución a la ED:

$$\int \frac{1 + u^2}{u^3}\ du = -\int \frac{1}{2x}\ dx \Longrightarrow -\frac{1}{2}u^{-2} + \ln|u| = -\ln|Kx^2|$$

Devolviendo el cambio de variable inicial:

$$u = \frac{y}{x}$$

$$\Longrightarrow -\frac{1}{2}\left(\frac{y}{x}\right)^{-2} + \ln\left|\frac{y}{x}\right| = -\ln|Kx^2|$$

Finalmente, la solución al problema es:

$$\boxed{-\frac{1}{2}\left(\frac{y}{x}\right)^{-2} + \ln\left|\frac{y}{x}\right| = -\ln|Kx^2|}$$

2.3.1 EDO reducibles a Homogéneas

21. *Resuelva la siguiente ecuación diferencial, con $y = f(x)$:*

$$y' = \frac{x + y - 1}{x - 2y}$$

Solución: Veamos que se trata de una ED homogenea reducible ya que es de la forma $\dfrac{dy}{dx} = f\left(\dfrac{a_1x + b_1y + c_1}{a_2x + b_2y + c_2}\right)$, con $a_1 = 1$, $b_1 = 1$, $c_1 = -1$, $a_2 = 1$, $b_2 = -2$ y $c_2 = 0$. Por ende, debemos determinar si ambas rectas son paralelas o tienen un punto de intersección. Así,

$$\begin{cases} l_1 : x + y - 1 = 0 \Longrightarrow y = -x + 1 \\ \\ l_2 : x - 2y = 0 \Longrightarrow y = \dfrac{1}{2}x \end{cases}$$

Veamos que las pendientes de ambas rectas no son iguales, por ende, deben intersectarse en algún punto del plano real. Hallamos dicho punto:

$$\begin{cases} y = -x + 1 \\ \\ y = \dfrac{1}{2}x \end{cases} \Longrightarrow -x + 1 = \frac{1}{2}x \Longrightarrow x = \frac{2}{3} \quad y = \frac{1}{3} \Longrightarrow (x, y) = \left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right)$$

De esta forma, se propone el siguiente cambio de variable, con $u = f(x)$ y $v = f(y)$:

$$\begin{cases} u = x - \dfrac{2}{3} \Longrightarrow x = u + \dfrac{2}{3} \Longrightarrow dx = du \\ v = y - \dfrac{1}{3} \Longrightarrow y = v + \dfrac{1}{3} \Longrightarrow dy = dv \end{cases} \Longrightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{dv}{du}$$

Sustituyendo en la ED, tenemos que:

$$y' = \frac{x + y - 1}{x - 2y} \Longrightarrow \frac{dv}{du} = \frac{u + \dfrac{2}{3} + v + \dfrac{1}{3} - 1}{u + \dfrac{2}{3} - 2\left(v + \dfrac{1}{3}\right)} = \frac{u + v}{u - 2v} = \frac{1 + \dfrac{v}{u}}{1 - 2\dfrac{v}{u}} = F\left(\frac{v}{u}\right)$$

El cambio de variable produjo que la ED pasase a ser una de tipo homogénea, tal cual como lo evidencia la forma de ED obtenida en la expresión anteriormente. Por lo tanto, aplicamos el cambio de variable con $z = f(u)$:

$$v = zu \Longrightarrow \frac{dv}{du} = \frac{d}{du}(zu) = \frac{dz}{du}u + z$$

Ahora, sustituyendo en la ED tenemos:

$$\frac{dv}{du} = \frac{u+v}{u-2v} \Longrightarrow \frac{dz}{du}u + z = \frac{u+zu}{u-2zu} = \frac{1+z}{1-2z} \Longrightarrow \frac{dz}{du}u = \frac{1+z}{1-2z} - z = \frac{1+z-z(1-2z)}{1-2z} = \frac{1+2z^2}{1-2z}$$

$$\Longrightarrow \frac{1-2z}{1+2z^2}dz = \frac{1}{u}du$$

Veamos que ahora tenemos que resolver una ED de variables separables. Así, integramos a ambos lados de la igualdad:

$$\int \frac{1-2z}{1+2z^2}\,dz = \int \frac{1}{u}\,du$$

$$\int \frac{1-2z}{1+2z^2}\,dz = \int \frac{1}{1+2z^2} - 2\frac{z}{1+2z^2}\,dz = \underbrace{\int \frac{1}{1+2z^2}\,dz}_{I_1} - 2\underbrace{\int \frac{z}{1+2z^2}\,dz}_{I_2}$$

$$I_1 = \int \frac{1}{1+2z^2}\,dz = \int \frac{1}{1+(\sqrt{2}z)^2}\,dz \quad \text{CV} \begin{cases} x = \sqrt{2}z \\ dx = \sqrt{2}dz \Longrightarrow dz = \frac{1}{\sqrt{2}}dx \end{cases}$$

$$I_1 = \int \frac{1}{1+x^2}\frac{1}{\sqrt{2}}\,dx = \frac{1}{\sqrt{2}}\int \frac{1}{1+x^2}\,dx = \frac{1}{\sqrt{2}}\arctan(x) + C_1 \Longrightarrow I_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\arctan(\sqrt{2}z) + C_1$$

$$I_2 = \int \frac{z}{1+2z^2}\,dz \quad \text{CV} \begin{cases} x = 1+2z^2 \\ dx = 4zdz \Longrightarrow zdz = \frac{1}{4}dx \end{cases}$$

$$I_2 = \int \frac{1}{x}\frac{1}{4}\,dx = \frac{1}{4}\ln|x| + C_2 \Longrightarrow I_2 = \frac{1}{4}\ln|1+2z^2| + C_2$$

$$\int \frac{1-2z}{1+2z^2}\,dz = I_1 - 2I_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}\arctan(\sqrt{2}z) - 2\frac{1}{4}\ln|1+2z^2| + C = \frac{1}{\sqrt{2}}\arctan(\sqrt{2}z) - \frac{1}{2}\ln|1+2z^2| + C$$

De esta forma, sustituyendo en la expresión anterior, podremos hallar la solución a la ED:

$$\int \frac{1-2z}{1+2z^2}\,dz = \int \frac{1}{u}\,du \Longrightarrow \frac{1}{\sqrt{2}}\arctan(\sqrt{2}z) - \frac{1}{2}\ln|1+2z^2| = \ln|u| + C$$

Devolviendo los cambios de variable propuestos:

$$z = \frac{v}{u} \quad u = x - \frac{2}{3} \quad v = y - \frac{1}{3}$$

$$\Longrightarrow \frac{1}{\sqrt{2}}\arctan\left(\sqrt{2}\,\frac{y-1/3}{x-2/3}\right)-\frac{1}{2}\ln\left|1+2\left(\frac{y-1/3}{x-2/3}\right)^2\right| = \ln|x-2/3|+C$$

Finalmente, la solución al problema es:

$$\boxed{\frac{1}{\sqrt{2}}\arctan\left(\sqrt{2}\,\frac{y-1/3}{x-2/3}\right)-\frac{1}{2}\ln\left|1+2\left(\frac{y-1/3}{x-2/3}\right)^2\right| = \ln|x-2/3|+C}$$

2.4 Casos Especiales de las Ecuaciones Diferenciales Lineales Homogéneas de grado n=2

2.4.1 De la forma $y''(x) + P(x)y'(x) + Q(x)y = 0$ conocida una solución y_1

Tenemos la siguiente ecuación:

$$y''(x) + P(x)y'(x) + Q(x)y(x) = 0$$

donde se conoce una solución $y_1(x) \neq 0$. El objetivo es construir la restante solución de tal forma que sea LI con respecto a $y_1(x)$, tal que la solución general de la EDLH tenga la siguiente forma:

$$y_g = C_1y_1 + C_2y_2$$

De esta forma, se plantea la siguiente forma de la solución y_2:

$$y_2(x) = y_1(x)u(x)$$

donde $u(x)$ es la función a determinar para la construcción de la solución antes mencionada. Luego, si y_1 y y_2 forman un espacio fundamental de soluciones, entonces satisfacen la EDLH. Luego, sustituyendo la expresion y_2 en la EDLH tenemos que:

$$y_2'(x) = u'(x)y_1(x) + u(x)y_1'(x)$$

$$y_2''(x) = u''(x)y_1(x) + 2u'(x)y_1'(x) + u(x)y_1''(x)$$

$$y_2''(x) + P(x)y_2'(x) + Q(x)y_2(x) = 0$$

$$\Longrightarrow u''y_1 + 2u'y_1' + uy_1'' + P\left(u'y_1 + uy_1'\right) + Qy_1u = 0$$

Recordemos que el objetivo es hallar la expresión de la función u. Por ende, se agruparan los términos semejantes de dicha función:

$$y_1u'' + \left(2y_1' + Py_1\right)u' + \left(y_1'' + Py_1' + Qy_1\right)u = 0$$

Notemos que el coeficiente de la función u es exactamente la EDLH; por ende, su valor es igual a 0. Así:

$$y_1 u'' + (2y_1' + P y_1)\, u' = 0$$

Si hacemos el cambio de variable $z(x) = u'(x)$ y dividiendo por $y_1 \neq 0$ tenemos que:

$$z' + \frac{(2y_1' + P y_1)}{y_1} z = 0$$

La anterior expresión resulta en una EDO de primer orden, tal como lo hemos estudiado en las secciones anteriores. Se redujo el orden de la EDO mediante la forma propuesta de la solución restante. Por esta particular característica se le suele llamar a este caso específico como **Reducción de orden**.

Llamando a $A(x) = (2y_1'(x) + P(x) y_1(x))/y_1(x)$, tenemos la siguiente ecuación simplificada:

$$z' + Az = 0$$

Procedemos a resolver la EDO de primer orden:

$$\Longrightarrow \frac{dz}{dx} + Az = 0 \Longrightarrow \frac{dz}{dx} = -Az \Longrightarrow \frac{dz}{z} = -A\ dx$$

Integrando a ambos lados:

$$\underbrace{\int \frac{1}{z}\ dz}_{I} = \underbrace{\int -A\ dx}_{II}$$

$$I = \int \frac{1}{z}\ dz = \ln|z| + C_1$$

$$II = \int -A\ dx = -\int \frac{2y_1' + P y_1}{y_1}\ dx = -\left(2\int \frac{y_1'}{y_1}\ dx + \int P\ dx\right) = -\left(2\ln|y_1| + \int P\ dx + C_2\right)$$

De esta forma, tenemos que:

$$\Longrightarrow \ln|Kz| = -2\ln|y_1| - \int P\ dx$$

Despejando la variable z aplicando la función inversa:

$$Kz = \exp\left(-2\ln|y_1| - \int P\ dx\right) = \exp\left(\ln|{y_1}^{-2}|\right)\exp\left(-\int P\ dx\right) = \frac{\exp\left(-\int P\ dx\right)}{{y_1}^2}$$

Recordando que $z = u'$, sustituyendo tenemos que:

$$Ku' = \frac{\exp\left(-\int P\ dx\right)}{{y_1}^2}$$

Integrando a ambos lados con respecto a x, tenemos que:

$$\implies \int Ku'\ dx = \int \frac{\exp\left(-\int P\ dx\right)}{{y_1}^2}\ dx$$

Finalmente, hallamos la expresión de la función u:

$$\implies Ku = \int \frac{\exp\left(-\int P\ dx\right)}{{y_1}^2}\ dx$$

Entonces, la solución restante de la EDLH es:

$$y_2 = uy_1 = \frac{y_1}{K}\int \frac{\exp\left(-\int P\ dx\right)}{{y_1}^2}\ dx$$

Ahora, el problema pareciera que se necesita determinar el valor de la constante K para conocer apropiadamente la forma de la solución y_2. Pero, recordemos que nuestra intención es que y_2 formase parte del conjunto fundamental de solución de la EDLH. Por lo tanto, que cumpliese la forma $y_g = C_1y_1 + C_2y_2$.

Notemos que la solución y_2 se encuentra multiplicada por una constante arbitraria C_2. Por ende, en la expresión anterior de y_2 puede omitirse la constante K.

Más aún, las integraciones necesarias a realizar permitiran hallar la función primitiva del argumento de la integral más una constante. Estas últimas pueden despreciarse usando el mismo argumento anterior.

Finalmente, la solución restante tiene la forma:

$$y_2 = y_1 \int \frac{\exp\left(-\int P\ dx\right)}{{y_1}^2}\ dx$$

22. *Usando reducción de orden encuentre la solución general de la siguiente ecuación diferencial, con $y = f(x)$, sabiendo que $y_1(x) = x + 1$ es una solución:*

$$(1 - 2x - x^2)y'' + 2(1 + x)y' - 2y = 0$$

Solución: Llevamos a la EDLH a la forma de reducción de orden. Para ello, dividimos por el polinomio del término de segundo orden, asumiendo que es distinto de cero:

$$y'' + \frac{2(1 + x)}{(1 - 2x - x^2)}y' - \frac{2}{(1 - 2x - x^2)}y = 0$$

Se observa que el polinomio P tiene la expresión:

$$P(x) = \frac{2(1 + x)}{(1 - 2x - x^2)}$$

Así, procedemos a hallar la segunda solución y_2:

$$y_2 = y_1 \int \frac{\exp\left(-\int P\ dx\right)}{{y_1}^2}\ dx$$

Para manejar mejor la expresión, iremos resolviendo poco a poco la integral. Así:

$$I = \int P\ dx = \int \frac{2(1 + x)}{(1 - 2x - x^2)}\ dx = 2\int \frac{1 + x}{1 - 2x - x^2}\ dx$$

Notemos que haciendo el cambio de variable:

$$u = 1 - 2x - x^2 \Longrightarrow du = (-2 - 2x)dx = -2(1 + x)dx \Longrightarrow -\frac{du}{2} = (1 + x)dx$$

Así, tenemos que:

$$I = -\int \frac{1}{u}\ du = -\ln|u|$$

Devolviendo el cambio de variable:

$$I = -\ln|1 - 2x - x^2|$$

Luego, siguiendo con la expresión de y_2:

$$II = \exp\left(-\int P\ dx\right) = \exp(-I)$$

$$II = \exp\left(\ln|1-2x-x^2|\right) = 1-2x-x^2$$

Entonces, tenemos que:

$$III = \frac{\exp\left(-\int P\ dx\right)}{{y_1}^2} = \frac{II}{{y_1}^2}$$

$$III = \frac{1-2x-x^2}{(x+1)^2} = -\frac{x^2+2x-1}{(x+1)^2} = -\frac{x^2+2x-1}{(x+1)^2} = -\frac{x^2+2x+1-2}{(x+1)^2} = -\frac{(x+1)^2-2}{(x+1)^2}$$

$$III = -1 + \frac{2}{(x+1)^2}$$

Realizamos la última integración:

$$IV = \int \frac{\exp\left(-\int P\ dx\right)}{{y_1}^2}\ dx = \int III\ dx$$

$$IV = \int -1 + \frac{2}{(x+1)^2}\ dx = -x - \frac{2}{x+1}$$

Finalmente:

$$y_2 = y_1 \int \frac{\exp\left(-\int P\ dx\right)}{{y_1}^2}\ dx = y_1 IV$$

$$y_2 = -(x+1)\left(x + \frac{2}{x+1}\right) = -(x^2+x+2)$$

Así, la solución general de la EDLH es:

$$\boxed{y = C_1(x+1) + C_2(x^2+x+2)}$$

23. *Usando reducción de orden encuentre la solución general de la siguiente ecuación diferencial, con $y = f(x)$, sabiendo que $y_1(x) = e^{3x}$ es una solución:*

$$(3x+1)y'' - (9x+6)y' + 9y = 0$$

Solución: Llevamos a la EDLH a la forma de reducción de orden:

$$y'' - \frac{9x+6}{3x+1}y' + \frac{9}{3x+1}y = 0$$

Se observa que el polinomio P tiene la expresión:

$$P(x) = -\frac{9x+6}{3x+1}$$

Así, procedemos a hallar la segunda solución y_2:

$$I = \int P\ dx = \int -\frac{9x+6}{3x+1}\ dx = -3\int \frac{3x+2}{3x+1}\ dx = -3\int \frac{3x+1+1}{3x+1}\ dx = -3\int 1 + \frac{1}{3x+1}\ dx$$

$$I = -3\int 1 + \frac{1}{3}\frac{1}{x+1/3}\ dx = -3\left(x + \frac{1}{3}\ln\left|x+\frac{1}{3}\right|\right) = -3x - \ln\left|\frac{3x+1}{3}\right| = -3x - \ln|3x+1| + \ln(3)$$

Así, tenemos que:

$$I = -3x - \ln|3x+1| + \ln(3)$$

Luego:

$$II = \exp\left(-\int P\ dx\right) = \exp(-I)$$

$$II = \exp(3x + \ln|3x+1| - \ln(3)) = \exp(3x)\exp(\ln|3x+1|)\exp(-\ln(3))$$

$$II = \frac{3x+1}{3}e^{3x}$$

Entonces, tenemos que:

$$III = \frac{\exp\left(-\int P\ dx\right)}{{y_1}^2} = \frac{II}{{y_1}^2}$$

$$III = \frac{\frac{3x+1}{3}e^{3x}}{(e^{3x})^2} = \frac{1}{3}\frac{3x+1}{e^{3x}} = \frac{1}{3}(3x+1)e^{-3x}$$

$$III = \frac{1}{3}(3x+1)e^{-3x}$$

Realizamos la última integración:

$$IV = \int \frac{\exp\left(-\int P\ dx\right)}{{y_1}^2}\ dx = \int III\ dx$$

$$IV = \int \frac{1}{3}(3x+1)e^{-3x}\ dx = \frac{1}{3}\int (3x+1)e^{-3x}\ dx$$

Haciendo integración por partes:

$$IV = \frac{1}{3}\int (3x+1)e^{-3x}\ dx$$

$$\begin{cases} u = 3x+1 \Longrightarrow du = 3dx \\ dv = e^{-3x} \Longrightarrow v = -\dfrac{1}{3}e^{-3x} \end{cases}$$

$$IV = \frac{1}{3}\left(-\frac{1}{3}(3x+1)e^{-3x} + \int e^{-3x}\ dx\right) = \frac{1}{3}\left(-\frac{1}{3}(3x+1)e^{-3x} - \frac{1}{3}e^{-3x}\ dx\right)$$

$$IV = -\frac{1}{9}(3x+2)e^{-3x}$$

Finalmente:

$$y_2 = y_1 \int \frac{\exp\left(-\int P\ dx\right)}{{y_1}^2}\ dx = y_1 IV$$

$$y_2 = -e^{3x}\left(\frac{1}{9}(3x+2)e^{-3x}\right) = -\frac{1}{9}(3x+2)$$

Así, la solución general de la EDLH es:

$$\boxed{y = C_1e^{3x} + C_2(3x+2)}$$

24. *Usando reducción de orden encuentre la solución general de la siguiente ecuación diferencial, con $y = f(x)$, sabiendo que $y_1(x) = x^{-2}$ es una solución:*

$$y'' + \frac{6}{x}y' + \frac{6}{x^2}y = 0$$

Solución: Se observa que el polinomio P tiene la expresión:

$$P(x) = \frac{6}{x}$$

Procedemos a hallar la segunda solución y_2:

$$I = \int P\ dx = \int \frac{6}{x}\ dx = 6 \int \frac{1}{x}\ dx = 6 \ln |x|$$

Luego:

$$II = \exp\left(-\int P\ dx\right) = \exp\left(-I\right)$$

$$II = \exp\left(-6\ln|x|\right) = x^{-6}$$

Entonces, tenemos que:

$$III = \frac{\exp\left(-\int P\ dx\right)}{{y_1}^2} = \frac{II}{{y_1}^2}$$

$$III = \frac{x^{-6}}{(x^{-2})^2} = \frac{x^{-6}}{x^{-4}} = x^{-2}$$

Realizamos la última integración:

$$IV = \int \frac{\exp\left(-\int P\ dx\right)}{{y_1}^2}\ dx = \int III\ dx$$

$$IV = \int x^{-2}\ dx = -\frac{1}{x}$$

Finalmente:

$$y_2 = y_1 \int \frac{\exp\left(-\int P\ dx\right)}{{y_1}^2}\ dx = y_1 IV$$

$$y_2 = -x^{-2}x^{-1} = -x^{-3}$$

Así, la solución general de la EDLH es:

$$\boxed{y = C_1x^{-2} + C_2x^{-3}}$$

2.4.2 De la forma $F(x, y', y'') = 0$

2.4.3 De la forma $F(y, y', y'') = 0$

2.5 Ecuaciones Diferenciales Lineales No Homogéneas

2.5.1 Método de Variación de Parámetros

25. *Resuelva la siguiente ecuación diferencial, con $y = f(x)$:*

$$y'' - 2y' + 5y = 4e^x \cos(2x)$$

Solución: Hallamos la solución homogénea de la EDLNHCCC construyendo el polinomio característico $P(\lambda)$:

$$P(\lambda) = \lambda^2 - 2\lambda + 5 = 0 \Longrightarrow \lambda_{1,2} = \frac{2 \pm \sqrt{4-20}}{2} = \frac{2 \pm 4\,i}{2} = 1 \pm 2\,i$$

Por lo tanto, la solución homogénea de la EDLHCCC es:

$$y_h = C_1 e^x \cos(2x) + C_2 e^x \sin(2x)$$

Así, procedemos a hallar la solución no homogénea. Usaremos el método de variación de parámetros. Establecemos que y_{h_i} corresponde a la i-ésima solución de la ED homogénea, f es la función independiente y todas las funciones involucadras dependen de la variable x. De esta forma, la solución particular vendrá dada por la siguiente expresión:

$$y_p = u_1 \cdot y_{h_1} + u_2 \cdot y_{h_2}$$

donde:

$$u_1 = -\int \frac{y_{h_2} \cdot f}{y_{h_1} \cdot y'_{h_2} - y'_{h_1} \cdot y_{h_2}}\,dx \qquad u_2 = \int \frac{y_{h_1} \cdot f}{y_{h_1} \cdot y'_{h_2} - y'_{h_1} \cdot y_{h_2}}\,dx$$

Así, hallamos el denominador de ambas funciones u:

$$y'_{h_1} = e^x\left(\cos(2x) - 2\sin(2x)\right) \qquad y'_{h_2} = e^x\left(\sin(2x) + 2\cos(2x)\right)$$

$$y_{h_1} \cdot y'_{h_2} - y'_{h_1} \cdot y_{h_2} = e^x \cos(2x) \cdot e^x\left(\sin(2x) + 2\cos(2x)\right) - e^x\left(\cos(2x) - 2\sin(2x)\right) \cdot e^x \sin(2x) = \ldots$$

$$\ldots = \left[\cos(2x)\sin(2x) + 2\cos^2(2x) - \sin(2x)\cos(2x) + 2\sin^2(2x)\right] e^{2x} = 2e^{2x}$$

Así, tenemos que:

$$\frac{y_{h_2}\cdot f}{y_{h_1}\cdot y'_{h_2}-y'_{h_1}\cdot y_{h_2}}=\frac{e^x\sin(2x)\cdot 4e^x\cos(2x)}{2e^{2x}}=2\sin(2x)\cos(2x)$$

$$\frac{y_{h_1}\cdot f}{y_{h_1}\cdot y'_{h_2}-y'_{h_1}\cdot y_{h_2}}=\frac{e^x\cos(2x)\cdot 4e^x\cos(2x)}{2e^{2x}}=2\cos^2(2x)$$

De esta forma, procedemos a hallar las dos funciones u_1 y u_2:

$$u_1=-\int\frac{y_{h_2}\cdot f}{y_{h_1}\cdot y'_{h_2}-y'_{h_1}\cdot y_{h_2}}\ dx=-\int 2\sin(2x)\cos(2x)\ dx=-2\left(-\frac{1}{4}\cos^2(2x)\right)=\frac{1}{2}\cos^2(2x)$$

$$u_2=\int\frac{y_{h_1}\cdot f}{y_{h_1}\cdot y'_{h_2}-y'_{h_1}\cdot y_{h_2}}\ dx=\int 2\cos^2(2x)\ dx=2\int\frac{1+\cos(4x)}{2}\ dx=2\left(\frac{1}{2}x+\frac{1}{8}\sin(4x)\right)=...$$

$$...=x+\frac{1}{4}\sin(4x)$$

Así, procedemos a hallar la solución particular y_p:

$$y_p=\frac{1}{2}\cos^2(2x)\cdot e^x\cos(2x)+\left(x+\frac{1}{4}\sin(4x)\right)e^x\sin(2x)$$

$$y_p=e^x\left[\frac{1}{2}\cos^3(2x)+x\sin(2x)+\frac{1}{4}\sin(4x)\sin(2x)\right]$$

Antes de concluir el ejercicio, echemosle un vistazo a la solución particular. Podría hacerse un poco de carpintería para lograr simplificar la expresión anterior. Sabemos que:

$$\sin(4x)=2\sin(2x)\cos(2x)\Longrightarrow\sin(4x)\sin(2x)=2\sin^2(2x)\cos(2x)$$

Pero, por otro lado:

$$\sin^2(2x)+\cos^2(2x)=1\Longrightarrow\sin^2(2x)=1-\cos^2(2x)$$

Así:

$$\sin(4x)\sin(2x)=2\left(1-\cos^2(2x)\right)\cos(2x)=2\left(\cos(2x)-\cos^3(2x)\right)$$

Sustituyendo en la solución particular, tenemos:

$$y_p = e^x \left[\frac{1}{2}\cos^3(2x) + x\sin(2x) + \frac{1}{4} \cdot 2 \left(\cos(2x) - \cos^3(2x) \right) \right]$$

$$y_p = e^x \left[\frac{1}{2}\cos^3(2x) + x\sin(2x) + \frac{1}{2}\cos(2x) - \frac{1}{2}\cos^3(2x) \right] = e^x \left[\frac{1}{2}\cos(2x) + x\sin(2x) \right]$$

Finalmente, la solución particular es:

$$y_p = \frac{1}{2}e^x\cos(2x) + xe^x\sin(2x)$$

Sin embargo, si observamos bien la solución homogénea encontramos que la función $e^x\cos(2x)$ forma parte dicha solución. Por ende, nuestra solución particular, al menos en el primer término, no es linealmente independiente con respecto a la solución homogénea. Por ende, solo el segundo término, el que corresponde a $xe^x\sin(2x)$, corresponde a la solución particular de la EDLNHCCC. Así:

$$y_p = xe^x\sin(2x)$$

Finalmente, la solución al problema es:

$$\boxed{y = y_h + y_p = C_1e^x\cos(2x) + C_2e^x\sin(2x) + xe^x\sin(2x)}$$

2.5.2 Método de Coeficientes Indeterminados

26. *Resuelva la siguiente ecuación diferencial, con $y = f(x)$:*

$$y''' + 2y'' - y' - 2y = (3x^2 - x)e^{2x}$$

Solución: Primero hallamos la solución homogénea de la EDLNHCCC (Ecuación Diferencial Lineal No Homogénea con Coeficientes Constantes). Para ello, escribimos el polinomio característico $P(\lambda)$:

$$P(\lambda) = \lambda^3 + 2\lambda^2 - \lambda - 2 = 0$$

Hallamos las raices del polinomio característico:

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & 2 & -1 & -2 \\ 1 & & 1 & 3 & 2 \\ \hline & 1 & 3 & 2 & 0 \\ -1 & & -1 & -2 & \\ \hline & 1 & 2 & 0 & \\ -2 & & -2 & & \\ \hline & 1 & 0 & & \end{array}$$

Por lo tanto, tenemos que las raices de $P(\lambda)$ son:

$$\lambda = 1 \quad \lambda = -1 \quad \lambda = -2$$

Por ende, la solución homogénea de la EDLHCCC (Ecuación Diferencial Lineal Homogénea con Coeficientes Constantes) es:

$$y_h = C_1e^x + C_2e^{-x} + C_3e^{-2x}$$

Procedemos a hallar la solución no homogénea (o particular) de la ED. Usaremos el método de los coeficientes indeterminados. Por ende, proponderemos la siguiente solución particular:

$$y_p = (ax^2 + bx + c)e^{2x}$$

Verificamos si $\lambda = 0$ o $\lambda = 2$ (el primero por el polinomio y el segundo por la función exponencial) es una raiz del polinomio característico, ya que de existirlo tendría que multiplicarse por un factor de x^{α}, donde α es la multiplicidad de la raíz del $P(\lambda)$. Como no se encuentra dicha concordancia, procedemos a hallar las respectivas derivadas de la solución particular (con respecto a la variable x). Así:

$$y_p = (ax^2 + bx + c)e^{2x}$$

$$y_p' = \left[2ax^2 + (2a + 2b)x + (b + 2c)\right] e^{2x}$$

$$y_p'' = \left[4ax^2 + (8a + 4b)x + (2a + 4b + 4c)\right] e^{2x}$$

$$y_p''' = \left[8ax^2 + (24a + 8b)x + (12a + 12b + 8c)\right] e^{2x}$$

Sustituyendo en la EDNHCCC tenemos que:

$$\begin{aligned} &\left[8ax^2 + (24a + 8b)x + (12a + 12b + 8c)\right] e^{2x} + 2\left[4ax^2 + (8a + 4b)x + (2a + 4b + 4c)\right] e^{2x} \\ &\qquad - \left[2ax^2 + (2a + 2b)x + (b + 2c)\right] e^{2x} - 2(ax^2 + bx + c)e^{2x} = (3x^2 - x)e^{2x} \end{aligned}$$

$$12ax^2e^{2x} + (38a - 12b)xe^{2x} + (16a + 19b + 12c)e^{2x} = (3x^2 - x)e^{2x}$$

$$12ax^2 + (38a - 12b)x + (16a + 19b + 12c) = (3x^2 - x)$$

Igualando coeficientes a coeficientes tenemos que:

$$\begin{cases} 12a = 3 \\ 38a + 12b = -1 \\ 16a + 19b + 12c = 0 \end{cases}$$

Si resolvemos el sistema de ecuaciones, obtendremos que:

$$\begin{cases} a = \dfrac{1}{4} \\ b = -\dfrac{7}{8} \\ c = \dfrac{101}{96} \end{cases}$$

De esta forma, la solución particular es:

$$y_h = \left[\frac{1}{4}x^2 - \frac{7}{8}x + \frac{101}{96}\right] e^{2x}$$

Finalmente, la solución general de la EDLHCCC es:

$$\boxed{y = y_h + y_p = C_1 e^x + C_2 e^{-x} + C_3 e^{-2x} + \left[\frac{1}{4}x^2 - \frac{7}{8}x + \frac{101}{96}\right] e^{2x}}$$

27. *Resuelva la siguiente ecuación diferencial, con $x = f(t)$:*

$$x'' + x = 3\cos(t)$$

Solución: Hallamos la solución homogénea de la EDLNHCCC. Para ello, escribimos el polinomio característico $P(\lambda)$:

$$P(\lambda) = \lambda^2 + 1 = 0 \Longrightarrow \lambda_{1,2} = \pm i$$

Por ende, la solución homogénea de la EDLHCCC es:

$$x_h = C_1 \cos(t) + C_2 \sin(t)$$

Procedemos a hallar la solución particular. Para ello, usaremos el método de los coeficientes indeterminados. Si vemos la ED, observamos que la solución no homogénea debe ser una combinación lineal de funciones trigonométricas de seno y coseno. Así, se propone la siguiente solución:

$$x_p = a\sin(t) + b\cos(t)$$

Pero, observamos que $\lambda = \pm i$ es una raíz de multiplicidad 1 del polinomio característico. Así, debemos multiplicar nuestra propuesta por un factor de t^1. Así:

$$x_p = t\left(a\sin(t) + b\cos(t)\right)$$

De esta forma, procedemos a hallar las respectivas derivadas:

$$x_p' = a\sin(t) + b\cos(t) + t\left(a\cos(t) - b\sin(t)\right)$$

$$x_p'' = 2a\cos(t) - 2b\sin(t) - t\left(a\sin(t) + b\cos(t)\right)$$

Sustituyendo en la EDNHCCC obtenemos:

$$2a\cos(t) - 2b\sin(t) - t\left(a\sin(t) + b\cos(t)\right) + t\left(a\sin(t) + b\cos(t)\right) = 3\sin(t)$$

$$2a\cos(t) - 2b\sin(t) = 3\sin(t)$$

Igualando coeficientes a coeficientes obtenemos:

$$\begin{cases} 2a = 0 \Longrightarrow a = 0 \\ \\ -2b = 3 \Longrightarrow b = -\dfrac{3}{2} \end{cases}$$

De esta forma, la solución particular tiene la siguiente expresión:

$$x_p = -\frac{3}{2}t\cos(t)$$

Finalmente, la solución general de la EDLHCCC es:

$$\boxed{x = x_h + x_p = C_1\cos(t) + C_2\sin(t) - \frac{3}{2}t\cos(t)}$$

2.6 EDO con Coeficientes Variables

Tambien llamada la EDO de Euler. Es la EDO de la siguiente forma, donde $y = f(x)$:

$$a_n x^n y^{\{n\}} + a_{n-1} x^{n-1} y^{\{n-1\}} + ... + a_0 y = g(x)$$

La idea es realizar una sustitución de la variable independiente x tal que permita transformar a la EDO en una EDOLNH. Para ello, se utiliza el siguiente cambio de variable:

$$x = e^u \Longrightarrow u = \ln(x)$$

Con esto se busca expresar a la función y y a sus derivadas consecutivas en términos de la nueva variable u; es decir, $y = f(u)$. Así, deduciremos la transformación de la EDO de un orden 4. Tenemos la siguiente EDO homogénea:

$$ax^4 y^{(4)} + bx^3 y''' + cx^2 y'' + dxy' + ey = 0$$

Hallamos las derivadas consecutivas de la función y en términos de la variable u sabiendo que vamos a utilizar el cambio de variable $x = e^u$

$$x = e^u \Longrightarrow u = \ln(x) \Longrightarrow \frac{du}{dx} = \frac{1}{x} = x^{-1} = e^{-u} \Longrightarrow \frac{du}{dx} = e^{-u}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\frac{du}{dx} = \frac{dy}{du}e^{-u}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{dy'}{dx} = \frac{dy'}{du}\frac{du}{dx} = \left(\frac{dy}{du}e^{-u}\right)' e^{-u} = \left(\frac{d^2y}{du^2} - \frac{dy}{du}\right) e^{-2u}$$

$$\frac{d^3y}{dx^3} = \frac{dy''}{dx} = \frac{dy''}{du}\frac{du}{dx} = \left(\left(\frac{d^2y}{du^2} - \frac{dy}{du}\right) e^{-2u}\right)' e^{-u} = \left(\frac{d^3y}{du^3} - 3\frac{d^2y}{du^2} + 2\frac{dy}{du}\right) e^{-3u}$$

$$\frac{d^4y}{dx^4} = \frac{dy'''}{dx} = \frac{dy'''}{du}\frac{du}{dx} = \left(\left(\frac{d^3y}{du^3} - 3\frac{d^2y}{du^2} + 2\frac{dy}{du}\right) e^{-3u}\right)' e^{-u} = \left(\frac{d^4y}{du^4} - 6\frac{d^3y}{du^3} + 11\frac{d^2y}{du^2} - 6\frac{dy}{du}\right) e^{-4u}$$

Recordando que $e^{-cu} = x^{-c}$, entonces tenemos que $e^{-cu}x^c = 1 \ \forall \ c \in \mathbb{R}$. Veamos que sustituyendo las derivadas consecutivas de y en términos de u hace que desaparezcan los coeficientes variables de cada una de las derivadas de la EDO. Así, logramos transformar la EDO con Coeficientes Variables a una EDOLNH mediante la sustitución de Euler. Entonces, sustituyendo tenemos:

$$a\left(\frac{d^4y}{du^4}-6\frac{d^3y}{du^3}+11\frac{d^2y}{du^2}-6\frac{dy}{du}\right)+b\left(\frac{d^3y}{du^3}-3\frac{d^2y}{du^2}+2\frac{dy}{du}\right)+c\left(\frac{d^2y}{du^2}-\frac{dy}{du}\right)+d\frac{dy}{du}+ey=0$$

$$a\frac{d^4y}{du^4}+(-6a+b)\frac{d^3y}{du^3}+(11a-3b+c)\frac{d^2y}{du^2}+(-6a+2b-c+d)\frac{dy}{du}+ey=0$$

De esta forma tenemos la EDOLNH en términos de la variable u

$$ay^{(4)}+(-6a+b)y'''+(11a-3b+c)y''+(-6a+2b-c+d)y'+ey=0$$

Así, basta resolver la EDOLNH o la EDOLH en términos de u y devolver el cambio de variable impuesto $u=\ln(x)\Longrightarrow x=e^u$.

28. *Resuelva la siguiente ecuación diferencial, con $y=f(x)$:*

$$x^3y'''-4x^2y''+8xy'-8y=4\ln(x)\quad \forall x>0$$

Solución: Aplicamos el cambio de variable de Euler y sustituimos los varoles de los coeficientes en la forma desarrollada explicada al inicio de la subsección:

$$x=e^u\Longrightarrow u=\ln(x)$$

$$x^3y'''-4x^2y''+8xy'-8y=4\ln(x)\quad \text{con } y=f(x)$$

$$y'''-7y''+14y'-8y=4u\quad \text{con } y=f(u)$$

De esta forma, tenemos una EDOLNH. Entonces, hallaremos primero la solución homogénea y luego la solución particular.

Escribimos el polinomio característico $P(\lambda)$:

$$P(\lambda)=\lambda^3-7\lambda^2+14\lambda-8=0$$

Hallamos las raices del polinomio característico:

$$\begin{array}{c|cccc} & 1 & -7 & 14 & -8 \\ 4 & & 4 & -12 & 8 \\ \hline & 1 & -3 & 2 & 0 \\ 2 & & 2 & -2 & \\ \hline & 1 & -1 & 0 & \\ 1 & & 1 & & \\ \hline & 1 & 0 & & \end{array}$$

Por lo tanto, tenemos que las raices de $P(\lambda)$ son:

$$\lambda_1 = 4 \quad \lambda_2 = 2 \quad \lambda_3 = 1$$

Por ende, la solución a la EDOLNH es:

$$y_h = C_1 e^{4u} + C_2 e^{2u} + C_3 e^{u}$$

Procedemos a hallar la solución no homogénea (o particular) de la ED. Usaremos el método de los coeficientes indeterminados. Se propone la siguiente solución particular:

$$y_p = au + b$$

Verificamos si $\lambda = 0$ es una raiz del polinomio característico. Como no es solución de la EDOLH, procedemos a hallar las respectivas derivadas de la solución particular (con respecto a la variable u). Así:

$$y_p' = a \quad y_p'' = y_p''' = 0$$

Sustituyendo tenemos:

$$14a - 8(au + b) = 4u \Longrightarrow -8au + (14a - 8b) = 4u$$

Igualando coeficientes tenemos que:

$$\left\{ \begin{array}{c} -8a = 4 \Longrightarrow a = -\dfrac{1}{2} \\ 14a - 8b = 0 \Longrightarrow b = -\dfrac{7}{4} \cdot \dfrac{1}{2} = -\dfrac{7}{8} \end{array} \right.$$

Así, la solución particular tiene la siguiente expresión:

$$y_p = -\frac{1}{2}u - \frac{7}{8}$$

De esta forma, la solución general de la EDOLNH es:

$$y = y_h + y_p = C_1e^{4u} + C_2e^{2u} + C_3e^u - \frac{1}{2}u - \frac{7}{8}$$

Devolviendo el cambio de variable $x = e^u \Longrightarrow u = \ln(x)$, tenemos que la solución de la EDO con Coeficientes Variables es

$$\boxed{y = C_1x^4 + C_2x^2 + C_3x - \frac{1}{2}\ln(x) - \frac{7}{8}}$$

29. *Resuelva la siguiente ecuación diferencial, con $y = f(x)$:*

$$x^2y'' + 7xy' + 10y = \ln(x) \quad \forall x > 0$$

Solución: Aplicamos el cambio de variable de Euler y obtenemos la siguiente EDO:

$$x = e^u \Longrightarrow u = \ln(x)$$

$$x^2y'' + 7xy' + 10y = \ln(x) \quad \text{con } y = f(x)$$

$$y'' + 6y' + 10y = u \quad \text{con } y = f(u)$$

De esta forma, tenemos una EDOLNH. Entonces, hallaremos primero la solución homogénea y luego la solución particular.

Escribimos el polinomio característico $P(\lambda)$:

$$P(\lambda) = \lambda^2 + 6\lambda + 10 = 0$$

Por lo tanto, tenemos que las raices de $P(\lambda)$ son:

$$\lambda_1 = -3 + i \quad \lambda_2 = -3 - i$$

Por ende, la solución a la EDOLNH es:

$$y_h = e^{-3u}\left(C_1\cos(u) + C_2\sin(u)\right)$$

Procedemos a hallar la solución no homogénea (o particular) de la ED. Usaremos el método de los coeficientes indeterminados. Se propone la siguiente solución particular:

$$y_p = au + b$$

Verificamos si $\lambda = 0$ es una raiz del polinomio característico. Como no es solución de la EDOLH, procedemos a hallar las respectivas derivadas de la solución particular (con respecto a la variable u). Así:

$$y_p' = a \quad y_p'' = 0$$

Sustituyendo tenemos:

$$6a + 10(au + b) = u \Longrightarrow (10a)u + (10b + 6a) = u$$

Igualando coeficientes tenemos que:

$$\begin{cases} 10a = 1 \Longrightarrow a = \dfrac{1}{10} \\ 10b + 6a = 0 \Longrightarrow b = -\dfrac{6}{10} \cdot \dfrac{1}{10} = -\dfrac{3}{50} \end{cases}$$

Así, la solución particular tiene la siguiente expresión:

$$y_p = \frac{1}{10}u - \frac{3}{50}$$

De esta forma, la solución general de la EDOLNH es:

$$y = y_h + y_p = e^{-3u}\left(C_1\cos(u) + C_2\sin(u)\right) + \frac{1}{10}u - \frac{3}{50}$$

Devolviendo el cambio de variable $x = e^u \Longrightarrow u = \ln(x)$, tenemos que la solución de la EDO con Coeficientes Variables es

$$\boxed{y = x^{-3}\left(C_1\cos(\ln(x)) + C_2\sin(\ln(x))\right) + \frac{1}{10}\ln(x) - \frac{3}{50}}$$

30. *Resuelva la siguiente ecuación diferencial, con $y = f(x)$:*

$$x^2y'' - 3xy' + 13y = 3x + 4 \quad \forall x > 0$$

Solución: Aplicamos el cambio de variable de Euler y obtenemos:

$$x = e^u \Longrightarrow u = \ln(x)$$

$$x^2y'' - 3xy' + 13y = 3x + 4 \quad \text{con } y = f(x)$$

$$y'' - 4y' + 13y = 3e^u + 4 \quad \text{con } y = f(u)$$

De esta forma, tenemos una EDOLNH. Entonces, hallaremos primero la solución homogénea y luego la solución particular.

Escribimos el polinomio característico $P(\lambda)$:

$$P(\lambda) = \lambda^2 - 4\lambda + 13 = 0$$

Por lo tanto, tenemos que las raices de $P(\lambda)$ son:

$$\lambda_1 = 2 + 3i \quad \lambda_2 = 2 - 3i$$

Por ende, la solución a la EDOLNH es:

$$y_h = e^{2u}\left(C_1\cos(3u) + C_2\sin(3u)\right)$$

Procedemos a hallar la solución no homogénea (o particular) de la ED. Usaremos el método de los coeficientes indeterminados. Se propone la siguiente solución particular:

$$y_p = ae^u + b$$

Verificamos si $\lambda = 1$ es una raiz del polinomio característico. Como no es solución de la EDOLH, procedemos a hallar las respectivas derivadas de la solución particular (con respecto a la variable u). Así:

$$y_p' = y_p'' = ae^u$$

Sustituyendo tenemos:

$$ae^u - 4(ae^u) + 13(ae^u + b) = 3e^u + 4 \Longrightarrow (10a)e^u + 13b = 3e^u + 4$$

Igualando coeficientes tenemos que:

$$\begin{cases} 10a = 3 \Longrightarrow a = \dfrac{3}{10} \\ 13b = 4 \Longrightarrow b = \dfrac{4}{13} \end{cases}$$

Así, la solución particular tiene la siguiente expresión:

$$y_p = \frac{3}{10}e^u + \frac{4}{13}$$

De esta forma, la solución general de la EDOLNH es:

$$y = y_h + y_p = e^{2u}\left(C_1\cos(3u) + C_2\sin(3u)\right) + \frac{3}{10}e^u + \frac{4}{13}$$

Devolviendo el cambio de variable $x = e^u \Longrightarrow u = \ln(x)$, tenemos que la solución de la EDO con Coeficientes Variables es

$$\boxed{y = x^2\left(C_1\cos(3\ln(x)) + C_2\sin(3\ln(x))\right) + \frac{3}{10}x + \frac{4}{13}}$$

3 Sistemas de Ecuaciones Diferenciales Lineales No Homogéneo

31. *Resuelva el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales, con $x, y = f(t)$:*

$$\begin{cases} x' = x - 5y + \cos(3x) \\ y' = 2x - y - 2\sin(3x) \end{cases}$$

Solución: Escribimos el SEDL (Sistema de Ecuaciones Diferenciales Lineales) de forma matricial:

$$\vec{X'} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} \quad A = \begin{pmatrix} 1 & -5 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \quad \vec{X} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad \vec{G} = \begin{pmatrix} \cos(3t) \\ -2\sin(3t) \end{pmatrix}$$

Así, obtenemos la siguiente expresión:

$$\vec{X'} = A\vec{X} + \vec{G}$$

Donde todas los vectores y matriz asociadas son función de la variable independiente t. De esta forma, podemos concluir que se trata de un SEDLNHCCC (SEDL No Homogéneo con Coeficientes Constantes). Así, la solución general del problema es:

$$\vec{X_g} = \vec{X_h} + \vec{X_p}$$

$\vec{X_h}$ corresponde al conjunto fundamental de soluciones del problema $\vec{X'} = A\vec{X}$, que no es más que la resolución del problema de un SEDLH (Sistema de Ecuaciones Diferenciales Lineales Homogéneo). Esta solución cumple con la siguiente forma $\vec{X_h} = \Psi\vec{C}$, donde $\Psi \in M_{nxn}(\mathbb{R})$ es la matriz fundamental de soluciones del sistema homogéneo y $\vec{C} \in M_{nx1}(\mathbb{R})$ es el conjunto de constantes asociadas.

Por otra parte, $\vec{X_p}$ responde a la solución particular del SEDLNH (Sistema de Ecuaciones Diferenciales Lineales No Homogéneo), el cual cumple con la forma $\vec{X_p} = \Psi \int \Psi^{-1}\vec{G}\ dt$.

Así, primero hallamos la solución del sistema homogéneo. Para ello, hallamos los autovalores asociados de la matriz A.

$$P(\lambda) = |A - \lambda I_{2x2}| = 0 \Longrightarrow P(\lambda) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & -5 \\ 2 & -1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)(-1-\lambda) - (-5)(2) = -(1-\lambda)(1+\lambda) + 10 = ...$$

$$= -(1-\lambda^2)+10 = \lambda^2+9 \Longrightarrow P(\lambda) = \lambda^2+9 = 0 \Longrightarrow \lambda_1 = 3i \quad \lambda_2 = -3i$$

Como se hallaron dos autovalores complejos, cada uno de ellos con una multiplicidad algebráica igual a la unidad, entonces se decide escoger uno de ellos y, a partir de este, construir las dos soluciones necesarias del sistema homogéneo. La razón de este procedimiento recae que los autovalores complejos vienen en pares, lo que quiere decir, que son linealmente dependientes entre sí. Por ende, solo basta con tomar uno de ellos para hallar la solución del SEDLH.

De esta forma, hallamos el autovector asociado al primer autovalor $\lambda = 3i$. Así:

Para $\lambda = 3i$, tenemos la siguiente situación:

$$(A - 3iI_{2x2})\vec{K} = \vec{O} \Longrightarrow \begin{pmatrix} 1-3i & -5 \\ 2 & -1-3i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1-3i & -5 \\ 2 & -1-3i \end{bmatrix} \xrightarrow{F_1 \to \frac{1}{1-3i}F_1} \begin{bmatrix} 1 & -\dfrac{1+3i}{2} \\ 2 & -1-3i \end{bmatrix} \xrightarrow{F_2 \to F_2 - 2F_1} \begin{bmatrix} 1 & -\dfrac{1+3i}{2} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \Longrightarrow k_1 - \frac{1+3i}{2}k_2 = 0$$

$$k_1 = \frac{1+3i}{2}k_2$$

Luego, el espacio de solución es:

$$V_{3i} = \left\{ \vec{K} = \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \end{pmatrix} : \vec{K} = \begin{pmatrix} \dfrac{1+3i}{2}k_2 \\ k_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{1+3i}{2} \\ 1 \end{pmatrix} k_2 \ , k_2 \in \mathbb{C} - \{0\} \right\}$$

$$V_{3i} = \text{gen} \begin{pmatrix} \dfrac{1+3i}{2} \\ 1 \end{pmatrix}$$

De esta forma, la solución homogénea viene dada por:

$$\vec{Z} = e^{3it}\vec{K} = (\cos(3t) + i\sin(3t)) \begin{pmatrix} 1+3i \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(3t) + i\sin(3t) + 3i\cos(3t) - 3\sin(3t) \\ 2\cos(3t) + 2i\sin(3t) \end{pmatrix}$$

Luego, las dos soluciones corresponden a la parte real e imaginaría de la solución compleja $\vec{Z}$

$$\vec{X}_1 = \text{Re}\left(\vec{Z}\right) = \begin{pmatrix} \cos(3t) - 3\sin(3t) \\ 2\cos(3t) \end{pmatrix}$$

$$\vec{X}_2 = \text{Im}\left(\vec{Z}\right) = \begin{pmatrix} 3\cos(3t) + \sin(3t) \\ 2\sin(3t) \end{pmatrix}$$

De esta forma, se tiene la posible matriz fundamental del sistema:

$$\Psi(t) = \begin{pmatrix} \cos(3t) - 3\sin(3t) & 3\cos(3t) + \sin(3t) \\ 2\cos(3t) & 2\sin(3t) \end{pmatrix}$$

Determinamos si la solución es LI (Linealmente Independiente). Para ello, hallamos el Wronskiano en cualquier valor de t. Escogemos $t = 0$, asumiendo que se encuentra en el rango I de solución. Así:

$$W(t=0) = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = 0 - 6 = -6 \neq 0$$

Por lo tanto, las dos soluciones encontradas son LI. Por ende, $\Psi(t)$ corresponde a la matriz fundamental del SEDLH, tal que:

$$\vec{X}_h = \Psi(t)\vec{C} \quad \text{con} \quad \vec{C} = \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix}$$

Así, la solución homogénea es:

$$\vec{X}_h = C_1 \begin{pmatrix} \cos(3t) - 3\sin(3t) \\ 2\cos(3t) \end{pmatrix} + C_2 \begin{pmatrix} 3\cos(3t) + \sin(3t) \\ 2\sin(3t) \end{pmatrix}$$

Ahora, calculamos la solución particular del SEDLNH. Para ello, debemos hallar la inversa de la matriz fundamental Ψ. Así:

$$\Psi = \begin{pmatrix} \cos(3t) - 3\sin(3t) & 3\cos(3t) + \sin(3t) \\ 2\cos(3t) & 2\sin(3t) \end{pmatrix}$$

$$\Longrightarrow \Psi^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3}\sin(3t) & \frac{1}{2}\cos(3t) + \frac{1}{6}\sin(3t) \\ \frac{1}{3}\cos(3t) & -\frac{1}{6}\cos(3t) + \frac{1}{2}\sin(3t) \end{pmatrix}$$

Luego, hallamos la matriz $\vec{F'} = \Psi^{-1}\vec{G}$:

$$\vec{F'} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3}\sin(3t) & \frac{1}{2}\cos(3t) + \frac{1}{6}\sin(3t) \\ \frac{1}{3}\cos(3t) & -\frac{1}{6}\cos(3t) + \frac{1}{2}\sin(3t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos(3t) \\ -2\sin(3t) \end{pmatrix}$$

$$\vec{F'} = \begin{pmatrix} -\frac{4}{3}\sin(3t)\cos(3t) - \frac{1}{3}\sin^2(3t) \\ \frac{1}{3}\cos^2(3t) + \frac{1}{3}\sin(3t)\cos(3t) - \sin^2(3t) \end{pmatrix}$$

Así, hallamos la antiderivada del vector $\vec{F'(t)}$:

$$\vec{F} = \int \vec{F'}\ dt = \begin{pmatrix} \int -\frac{4}{3}\sin(3t)\cos(3t) - \frac{1}{3}\sin^2(3t)\ dt \\ \int \frac{1}{3}\cos^2(3t) + \frac{1}{3}\sin(3t)\cos(3t) - \sin^2(3t)\ dt \end{pmatrix} \begin{matrix} (I) \\ (II) \end{matrix}$$

Recordamos los resultados de las siguientes integrales:

$$\int \sin(\alpha x)\cos(\alpha x)\ dx = \frac{1}{2\alpha}\sin^2(\alpha x) + C$$

$$\int \sin^2(\alpha x)\ dx = \frac{1}{2}x - \frac{1}{4\alpha}\sin(2\alpha x) + C$$

$$\int \cos^2(\alpha x)\ dx = \frac{1}{2}x + \frac{1}{4\alpha}\sin(2\alpha x) + C$$

De esta forma, tenemos:

$$I = \int -\frac{4}{3}\sin(3t)\cos(3t) - \frac{1}{3}\sin^2(3t)\ dt = -\frac{4}{3}\int \sin(3t)\cos(3t)\ dt - \frac{1}{3}\int \sin^2(3t)\ dt$$

$$I = -\frac{4}{3}\cdot\frac{1}{6}\sin^2(3t) - \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}t - \frac{1}{12}\sin(6t)\right) + C_I = -\frac{2}{9}\sin^2(3t) - \frac{1}{6}t + \frac{1}{36}\sin(6t) + C_I$$

$$II = \int \frac{1}{3}\cos^2(3t)+\frac{1}{3}\sin(3t)\cos(3t)-\sin^2(3t)\ dt = \frac{1}{3}\int \cos^2(3t)\ dt+\frac{1}{3}\int \sin(3t)\cos(3t)\ dt-\int \sin^2(3t)\ dt$$

$$II = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}t+\frac{1}{12}\sin(6t)\right)+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{6}\sin^2(3t)-\left(\frac{1}{2}t-\frac{1}{12}\sin(6t)\right)+C_{II}$$

$$II = -\frac{1}{3}t+\frac{1}{9}\sin(6t)+\frac{1}{18}\sin^2(3t)+C_{II}$$

Así, tenemos que el vector $\vec{F}$ es:

$$\vec{F} = \int \vec{F'}\ dt = \begin{pmatrix} -\frac{2}{9}\sin^2(3t)-\frac{1}{6}t+\frac{1}{36}\sin(6t)+C_I \\ -\frac{1}{3}t+\frac{2}{9}\sin(6t)+\frac{1}{9}\sin^2(3t)+C_{II} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{2}{9}\sin^2(3t)-\frac{1}{6}t+\frac{1}{36}\sin(6t) \\ -\frac{1}{3}t+\frac{1}{9}\sin(6t)+\frac{1}{18}\sin^2(3t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} C_I \\ C_{II} \end{pmatrix}$$

Finalmente, la solución particular es:

$$\vec{X_p} = \Psi\vec{F}$$

Veamos que el vector $\vec{F}$ tiene asociadas unas constantes de integración que responden a las integrales resueltas en cada una de sus posiciones. La multiplicación de la matriz fundamental Ψ por la forma del vector $\vec{F}$ dará como resultado $\vec{X_p} = \vec{Y} + \Psi\vec{C}$, donde $\vec{Y}$ es un vector producto de la multiplicación anterior. Por lo tanto, el segundo término corresponde a la solución homogénea del SEDL. Por ende, se desprecian las constantes de integración del vector $\vec{F}$. Así, tenemos:

$$\vec{F} = \int \vec{F'}\ dt = \begin{pmatrix} -\frac{2}{9}\sin^2(3t)-\frac{1}{6}t+\frac{1}{36}\sin(6t) \\ -\frac{1}{3}t+\frac{1}{9}\sin(6t)+\frac{1}{18}\sin^2(3t) \end{pmatrix}$$

Luego:

$$\vec{X_p} = \begin{pmatrix} \cos(3t)-3\sin(3t) & 3\cos(3t)+\sin(3t) \\ 2\cos(3t) & 2\sin(3t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{2}{9}\sin^2(3t)-\frac{1}{6}t+\frac{1}{36}\sin(6t) \\ -\frac{1}{3}t+\frac{1}{9}\sin(6t)+\frac{1}{18}\sin^2(3t) \end{pmatrix}$$

$$\vec{X_p} = \begin{pmatrix} \frac{13}{18}\sin(3t)-\frac{7}{6}t\cos(3t)+\frac{1}{6}t\sin(3t) \\ \frac{1}{9}\sin(3t)-\frac{1}{3}t\cos(3t)-\frac{2}{3}t\sin(3t) \end{pmatrix}$$

Finalmente, la solución al SEDLNHCCC es:

$$\boxed{\vec{X}_g = \vec{X}_h + \vec{X}_p}$$

$$\boxed{\vec{X}_h = C_1 \begin{pmatrix} \cos(3t) - 3\sin(3t) \\ \\ 2\cos(3t) \end{pmatrix} + C_2 \begin{pmatrix} 3\cos(3t) + \sin(3t) \\ \\ 2\sin(3t) \end{pmatrix}}$$

$$\boxed{\vec{X}_p = \begin{pmatrix} \dfrac{13}{18}\sin(3t) - \dfrac{7}{6}t\cos(3t) + \dfrac{1}{6}t\sin(3t) \\ \dfrac{1}{9}\sin(3t) - \dfrac{1}{3}t\cos(3t) - \dfrac{2}{3}t\sin(3t) \end{pmatrix}}$$

32. *Resuelva el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales, con $x, y, z = f(t)$:*

$$\vec{X}' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \\ 0 & 3 & -2 \\ \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \vec{X} + \begin{pmatrix} 0 \\ \\ 1 \\ \\ e^{3t} \end{pmatrix}$$

Solución: Calculamos los autovalores asociados a la matriz A

$$P(\lambda) = |A - \lambda I_{3x3}| = 0 \Longrightarrow P(\lambda) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & 0 \\ \\ 0 & 3-\lambda & -2 \\ \\ 1 & 2 & 3-\lambda \end{vmatrix}$$

$$P(\lambda) = (1-\lambda) \begin{vmatrix} 3-\lambda & -2 \\ \\ 2 & 3-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)\left((3-\lambda)(3-\lambda) + 4\right) = (1-\lambda)(\lambda^2 - 6\lambda + 13)$$

$$P(\lambda) = (1-\lambda)(\lambda - (3+2i))(\lambda - (3-2i)) \Longrightarrow \lambda_1 = 1 \quad \lambda_2 = 3 + 2i \quad \lambda_3 = 3 - 2i$$

Podemos observar que se obtuvieron tres autovalores: uno real y un par complejo. Como tenemos tres autovalores distintos entre sí, podemos asegurar que los autovectores respectivos son linealmente independientes entre sí. Es decir, no habrá la necesidad de construir una solución extra para la resolución del SEDLHCCC.

Dicho de otra forma, la multiplicidad algebráica de cada autovalor es la unidad. Por ende, la multiplicidad geométrica de cada uno de ellos debe ser igual a la unidad. Así, cada autovector será linealmente independiente.

Para $\lambda = 1$, tenemos que los autovectores asociados son:

$$(A - I_{3x3})\vec{K} = \vec{0} \Longrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -2 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \\ k_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -2 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{F_3 \to F_3 + 2F_2} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 4 \end{bmatrix} \xrightarrow{F_2 \to \frac{1}{2}F_2} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 4 \end{bmatrix} \Longrightarrow \begin{cases} k_2 - k_3 = 0 \\ k_1 + 4k_3 = 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} k_2 = k_3 \\ k_1 = -4k_3 \end{cases}$$

Luego, el espacio de solución es:

$$V_1 = \left\{ \vec{K} = \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \\ k_3 \end{pmatrix} : \vec{K} = \begin{pmatrix} -4k_3 \\ k_3 \\ k_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} k_3 \quad k_3 \in \mathbb{R} - \{0\} \right\}$$

$$V_1 = \text{gen} \left\{ \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

De esta forma, la primera solución del SEDLH es:

$$\vec{X}_1 = e^{\lambda_1 t} \vec{K}_1 = e^t \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Para $\lambda = 3 + 2i$, tenemos la siguiente situación:

$$(A - (3+2i)I_{3x3})\vec{K} = \vec{0} \Longrightarrow \begin{pmatrix} -2-2i & 0 & 0 \\ 0 & -2i & -2 \\ 1 & 2 & -2i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \\ k_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -2-2i & 0 & 0 \\ 0 & -2i & -2 \\ 1 & 2 & -2i \end{bmatrix} \xrightarrow[F_2 \to -\frac{1}{2}F_2]{F_1 \to \frac{1}{-2-2i}F_1} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & i & 1 \\ 1 & 2 & -2i \end{bmatrix} \xrightarrow{F_2 \to 2iF_2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 2i \\ 1 & 2 & -2i \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{F_3 \to F_3 + F_2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 2i \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Longrightarrow \begin{cases} k_1 = 0 \\ -2k_2 + 2ik_3 = 0 \Longrightarrow k_3 = -ik_2 \end{cases}$$

Luego, el espacio de solución es:

$$V_{3+2i} = \left\{ \vec{K} = \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \\ k_3 \end{pmatrix} : \vec{K} = \begin{pmatrix} 0 \\ k_2 \\ -ik_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -i \end{pmatrix} k_2 \quad , k_2 \in \mathbb{C} - \{0\} \right\}$$

$$V_{3+2i} = \text{gen} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -i \end{pmatrix}$$

De esta forma, la segunda y tercera solución homogénea viene dada por:

$$\vec{Z_{2,3}} = e^{(3+2i)t}\vec{K} = e^{3t}\left(\cos(2t) + i\sin(2t)\right) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ e^{3t}\left(\cos(2t) + i\sin(2t)\right) \\ -e^{3t}\left(i\cos(2t) - \sin(2t)\right) \end{pmatrix}$$

Luego, las dos soluciones corresponden a la parte real e imaginaría de la solución compleja $\vec{Z}$

$$\vec{X_2} = \text{Re}\left(\vec{Z_{2,3}}\right) = \begin{pmatrix} 0 \\ e^{3t}\cos(2t) \\ e^{3t}\sin(2t) \end{pmatrix}$$

$$\vec{X_3} = \operatorname{Im}\left(\vec{Z_{2,3}}\right) = \begin{pmatrix} 0 \\ e^{3t}\sin(2t) \\ -e^{3t}\cos(2t) \end{pmatrix}$$

De esta forma, se tiene la posible matriz fundamental del sistema:

$$\Psi(t) = \begin{pmatrix} -4e^t & 0 & 0 \\ e^t & e^{3t}\cos(2t) & e^{3t}\sin(2t) \\ e^t & e^{3t}\sin(2t) & -e^{3t}\cos(2t) \end{pmatrix}$$

Verificamos que sean LI. Para ello, hallamos el Wronskiano en $t = 0$

$$W(t = 0) = \begin{vmatrix} -4 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{vmatrix} = 4 \neq 0$$

Por lo tanto, las tres soluciones encontradas son LI. Por ende, $\Psi(t)$ corresponde a la matriz fundamental del SEDLH, tal que:

$$\vec{X_h} = \Psi(t)\vec{C} \quad \text{con} \quad \vec{C} = \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \end{pmatrix}$$

Así, la solución homogénea es:

$$\vec{X_h} = C_1 e^t \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + C_2 \begin{pmatrix} 0 \\ e^{3t}\cos(2t) \\ e^{3t}\sin(2t) \end{pmatrix} + C_3 \begin{pmatrix} 0 \\ e^{3t}\sin(2t) \\ -e^{3t}\cos(2t) \end{pmatrix}$$

Luego, debemos calcular la solución particular del SEDLNH. Para ello, debemos hallar la inversa de la matriz fundamental Ψ

$$\Psi(t) = \begin{pmatrix} -4e^{t} & 0 & 0 \\ e^{t} & e^{3t}\cos(2t) & e^{3t}\sin(2t) \\ e^{t} & e^{3t}\sin(2t) & -e^{3t}\cos(2t) \end{pmatrix}$$

$$\implies \Psi^{-1} = \begin{pmatrix} -\dfrac{1}{4}e^{-t} & 0 & 0 \\ \dfrac{1}{4}e^{-3t}\left(\sin(2t)+\cos(2t)\right) & e^{-3t}\cos(2t) & e^{-3t}\sin(2t) \\ -\frac{1}{4}e^{-3t}\left(\cos(2t)-\sin(2t)\right) & e^{-3t}\sin(2t) & -e^{-3t}\cos(2t) \end{pmatrix}$$

Luego, hallamos la matriz $\vec{F'} = \Psi^{-1}\vec{G}$:

$$\vec{F'} = \begin{pmatrix} -\dfrac{1}{4}e^{-t} & 0 & 0 \\ \dfrac{1}{4}e^{-3t}\left(\sin(2t)+\cos(2t)\right) & e^{-3t}\cos(2t) & e^{-3t}\sin(2t) \\ -\frac{1}{4}e^{-3t}\left(\cos(2t)-\sin(2t)\right) & e^{-3t}\sin(2t) & -e^{-3t}\cos(2t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ e^{3t} \end{pmatrix}$$

$$\vec{F'} = \begin{pmatrix} 0 \\ e^{-3t}\cos(2t)+\sin(2t) \\ e^{-3t}\sin(2t)-\cos(2t) \end{pmatrix}$$

Así, hallamos la antiderivada del vector $\vec{F'(t)}$:

$$\vec{F} = \int \vec{F'}\ dt = \begin{pmatrix} 0 \\ \displaystyle\int e^{-3t}\cos(2t)+\sin(2t)\ dt \\ \displaystyle\int e^{-3t}\sin(2t)-\cos(2t)\ dt \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ (I) \\ (II) \end{matrix}$$

Recordamos el resultado de las siguientes integrales:

$$\int e^{ax}\cos(bx)\ dx = \frac{e^{ax}}{a^2+b^2}\left(a\cos(bx)+b\sin(bx)\right)$$

$$\int e^{ax}\sin(bx)\ dx = \frac{e^{ax}}{a^2+b^2}\left(a\sin(bx)-b\cos(bx)\right)$$

De esta forma, tenemos que:

$$I=\int e^{-3t}\cos(2t)+\sin(2t)\ dt=\frac{e^{-3t}}{13}\left(-3\cos(2t)+2\sin(2t)\right)-\frac{1}{2}\cos(2t)+C_I$$

$$II=\int e^{-3t}\sin(2t)-\cos(2t)\ dt=-\frac{e^{-3t}}{13}\left(3\sin(2t)+2\cos(2t)\right)-\frac{1}{2}\sin(2t)+C_{II}$$

Así, tenemos que el vector $\vec{F}$ es:

$$\vec{F}=\int\vec{F'}\ dt=\begin{pmatrix}0\\ \frac{e^{-3t}}{13}\left(-3\cos(2t)+2\sin(2t)\right)-\frac{1}{2}\cos(2t)\\ -\frac{e^{-3t}}{13}\left(3\sin(2t)+2\cos(2t)\right)-\frac{1}{2}\sin(2t)\end{pmatrix}$$

Finalmente, la solución particular es:

$$\vec{X_p}=\Psi\vec{F}$$

$$\vec{X_p}=\begin{pmatrix}-4e^t & 0 & 0\\ e^t & e^{3t}\cos(2t) & e^{3t}\sin(2t)\\ e^t & e^{3t}\sin(2t) & -e^{3t}\cos(2t)\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\ \frac{e^{-3t}}{13}\left(-3\cos(2t)+2\sin(2t)\right)-\frac{1}{2}\cos(2t)\\ -\frac{e^{-3t}}{13}\left(3\sin(2t)+2\cos(2t)\right)-\frac{1}{2}\sin(2t)\end{pmatrix}$$

$$\vec{X_p}=\begin{pmatrix}0\\ -\frac{3}{13}-\frac{1}{2}e^{3t}\\ \frac{2}{13}\end{pmatrix}$$

Finalmente, la solución al SEDLNHCCC es:

$$\boxed{\vec{X_g}=\vec{X_h}+\vec{X_p}}$$

$$\boxed{\vec{X}_h = C_1 e^t \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + C_2 \begin{pmatrix} 0 \\ e^{3t}\cos(2t) \\ e^{3t}\sin(2t) \end{pmatrix} + C_3 \begin{pmatrix} 0 \\ e^{3t}\sin(2t) \\ -e^{3t}\cos(2t) \end{pmatrix}}$$

$$\boxed{\vec{X}_p = \begin{pmatrix} 0 \\ -\dfrac{3}{13} - \dfrac{1}{2}e^{3t} \\ \dfrac{2}{13} \end{pmatrix}}$$

33. *Resuelva el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales, con $x, y, z = f(t)$:*

$$\vec{X}' = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \vec{X} + \begin{pmatrix} 2t \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Solución: Como se puede evidenciar, se tiene un SEDLNHCCC. Por ende, debemos hallar la solución homogénea y particular del SED. Primero, calculamos la solución homogénea:

Calculamos los autovalores asociados a la matriz A

$$P(\lambda) = |A - \lambda I_{3x3}| = 0 \Longrightarrow P(\lambda) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 & 1 \\ 2 & 1-\lambda & -1 \\ 0 & -1 & 1-\lambda \end{vmatrix}$$

$$P(\lambda) = (1-\lambda) \begin{vmatrix} 1-\lambda & -1 \\ -1 & 1-\lambda \end{vmatrix} - 2 \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)\left((1-\lambda)^2 - 1\right) - 2\,(1-\lambda+1)$$

$$P(\lambda) = -(\lambda-2)^2(\lambda+1) \Longrightarrow \lambda_{1,2} = 2 \quad \lambda_3 = -1$$

Para $\lambda = -1$, tenemos que el autovector asociado es:

$$(A+I_{3x3})\vec{K}=\vec{O}\Longrightarrow\begin{pmatrix}2&1&1\\2&2&-1\\0&-1&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}k_1\\k_2\\k_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}2&1&1\\2&2&-1\\0&-1&2\end{bmatrix}\xrightarrow{F_2\to F_2-F_1}\begin{bmatrix}2&1&1\\0&1&-2\\0&-1&2\end{bmatrix}\xrightarrow{F_3\to F_3+F_2}\begin{bmatrix}2&1&1\\0&1&-2\\0&0&0\end{bmatrix}\xrightarrow{F_1\to F_1-F_2}\begin{bmatrix}2&0&3\\0&1&-2\\0&0&0\end{bmatrix}$$

$$\Longrightarrow\begin{cases}2k_1+3k_3=0\\k_2-2k_3=0\end{cases}\Longrightarrow\begin{cases}k_1=-\dfrac{3}{2}k_3\\k_2=2k_3\end{cases}$$

Luego, el espacio de solución es:

$$V_{-1}=\left\{\vec{K}=\begin{pmatrix}k_1\\k_2\\k_3\end{pmatrix}:\vec{K}=\begin{pmatrix}-\dfrac{3}{2}k_3\\2k_3\\k_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\dfrac{3}{2}\\2\\1\end{pmatrix}k_3\ ,k_3\in\mathbb{R}-\{0\}\right\}$$

$$V_{-1}=\text{gen}\begin{pmatrix}-3\\4\\2\end{pmatrix}$$

De esta forma, la primera solución del SEDLH es:

$$\vec{X}_1=e^{\lambda_1 t}\vec{K}_1=e^{-t}\begin{pmatrix}-3\\4\\2\end{pmatrix}$$

Para $\lambda=2$, tenemos que el autovector asociado es:

$$(A - 2I_{3x3})\vec{K} = \vec{0} \Longrightarrow \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \\ k_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 \end{bmatrix} \xrightarrow{F_2 \to F_2 + 2F_1} \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \end{bmatrix} \xrightarrow[F_2 \to F_2 + F_3]{F_1 \to F_1 + F_3} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \end{bmatrix} \xrightarrow[F_1 \to -F_1]{F_3 \to -F_3} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} k_1 = 0 \\ k_2 + k_3 = 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} k_1 = 0 \\ k_2 = -k_3 \end{cases}$$

Luego, el espacio de solución es:

$$V_2 = \left\{ \vec{K} = \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \\ k_3 \end{pmatrix} : \vec{K} = \begin{pmatrix} 0 \\ -k_3 \\ k_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} k_3 \ , k_3 \in \mathbb{R} - \{0\} \right\}$$

$$V_2 = \text{gen} \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

De esta forma, la segunda solución del SEDLH es:

$$\vec{X_2} = e^{\lambda_2 t} \vec{K_2} = e^{2t} \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Como la dimensión del espacio V_2 es $\dim V_2 = 1 < 2$, lo que quiere decir que la multiplicidad algebráica y geométrica del autovalor en cuestión no es igual. Por ende, es necesario construir una solución que sea linealmente independiente con $\vec{X_2}$ y satisfaga el SEDLH, es decir

$\vec{X'} = A\vec{X}$. Así, se propone la siguiente solución:

$$\vec{X}_3 = (\vec{P} + t\vec{K})e^{2t}$$

Luego, debe satisfacer el SEDLH. Por ende:

$$\vec{X}_3' = (2\vec{P} + 2t\vec{K} + \vec{K})e^{2t} = \left[(2\vec{P} + \vec{K}) + t(2\vec{K})\right] e^{2t}$$

$$\vec{X}_3' = A\vec{X}_3 \Longrightarrow \left[(2\vec{P} + \vec{K}) + t(2\vec{K})\right] e^{2t} = A(\vec{P} + t\vec{K})e^{2t} \Longrightarrow (2\vec{P} + \vec{K}) + t(2\vec{K}) = A\vec{P} + tA\vec{K}$$

Igualando término a término:

$$\begin{cases} 2\vec{P} + \vec{K} = A\vec{P} \\ 2\vec{K} = A\vec{K} \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} (A - 2I_{3x3})\vec{P} = \vec{K} \\ (A - 2I_{3x3})\vec{K} = \vec{0} \end{cases}$$

De la segunda ecuación se determina que el vector $\vec{K}$ no es otra cosa que un autovector asociado al autovalor $\lambda = 2$. Es decir, $\vec{K} \in V_2$. Por ende, $\vec{K}$ es una combinación lineal de los vectores que generan al espacio de solución V_2. Así, se toma $\vec{K}$ como:

$$\vec{K} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Luego, hallamos el vector $\vec{P}$ mediante la primera ecuación:

$$(A - 2I_{3x3})\vec{P} = \vec{K} \Longrightarrow \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{F_2 \to F_2 + 2F_1} \left[\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow[F_2 \to F_2 + F_3]{F_1 \to F_1 + F_3} \left[\begin{array}{ccc|c} -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[F_1 \to -F_1]{F_3 \to -F_3} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \end{array}\right]$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} p_1 = -1 \\ p_2 + p_3 = -1 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} p_1 = -1 \\ p_2 = -p_3 - 1 \end{cases}$$

Luego, la familia de vectores $\vec{P}$ que satisface la igualdad anterior es:

$$E_{\vec{P}} = \left\{ \vec{P} = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix} : \vec{p} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 - p_3 \\ p_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} p_3 \ , p_3 \in \mathbb{R} \right\}$$

De esta forma, escogemos el vector $\vec{P}$ más sencillo de todos. Fijando $p_3 = 0$, tenemos que:

$$\vec{P} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Así, la solución construida tiene la siguiente expresión:

$$\vec{X_3} = (\vec{P} + t\vec{K})e^{2t} = \left[\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right] e^{2t} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 - t \\ t \end{pmatrix} e^{2t}$$

De esta forma, se tiene la posible matriz fundamental del sistema:

$$\Psi(t) = \begin{pmatrix} -3e^{-t} & 0 & -e^{2t} \\ 4e^{-t} & -e^{2t} & -(1+t)e^{2t} \\ 2e^{-t} & e^{2t} & te^{2t} \end{pmatrix}$$

Determinamos si la solución es LI (Linealmente Independiente). Para ello, hallamos el Wronskiano en cualquier valor de t. Escogemos $t = 0$, asumiendo que se encuentra en el rango I de solución. Así:

$$W(t=0) = \begin{vmatrix} -3 & 0 & -1 \\ 4 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -9 \neq 0$$

Por lo tanto, las tres soluciones encontradas son LI. Por ende, $\Psi(t)$ corresponde a la matriz fundamental del SEDLH, tal que:

$$\vec{X_h} = \Psi(t)\vec{C} \quad \text{con} \quad \vec{C} = \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \end{pmatrix}$$

Así, la solución homogénea es:

$$\vec{X_h} = C_1 e^{-t} \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} + C_2 e^{2t} \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + C_3 e^{2t} \begin{pmatrix} -1 \\ -1-t \\ t \end{pmatrix}$$

Luego, debemos calcular la solución particular del SEDLNH. Para ello, debemos hallar la inversa de la matriz fundamental Ψ

$$\Psi(t) = \begin{pmatrix} -3e^{-t} & 0 & -e^{2t} \\ 4e^{-t} & -e^{2t} & -(1+t)e^{2t} \\ 2e^{-t} & e^{2t} & te^{2t} \end{pmatrix}$$

$$\Longrightarrow \Psi^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{9}e^{t} & \frac{1}{9}e^{t} & \frac{1}{9}e^{t} \\ \frac{2}{9}(3t+1)e^{-2t} & \frac{1}{9}(3t-2)e^{-2t} & \frac{1}{9}(3t+7)e^{-2t} \\ -\frac{2}{3}e^{-2t} & -\frac{1}{3}e^{-2t} & -\frac{1}{3}e^{-2t} \end{pmatrix}$$

Luego, hallamos la matriz $\vec{F'} = \Psi^{-1}\vec{G}$:

$$\vec{F'} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{9}e^{t} & \frac{1}{9}e^{t} & \frac{1}{9}e^{t} \\ \frac{2}{9}\left(3t+1\right)e^{-2t} & \frac{1}{9}\left(3t-2\right)e^{-2t} & \frac{1}{9}\left(3t+7\right)e^{-2t} \\ -\frac{2}{3}e^{-2t} & -\frac{1}{3}e^{-2t} & -\frac{1}{3}e^{-2t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2t \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\vec{F'} = \begin{pmatrix} \frac{1}{9}\left(-2t+1\right)e^{t} \\ \frac{1}{9}\left(12t^2+7t-2\right)e^{-2t} \\ -\frac{1}{3}\left(4t+1\right)e^{-2t} \end{pmatrix}$$

Así, hallamos la antiderivada del vector $\vec{F'(t)}$:

$$\vec{F} = \int \vec{F'}\ dt = \begin{pmatrix} \int \frac{1}{9}\left(-2t+1\right)e^{t}\ dt \\ \int \frac{1}{9}\left(12t^2+7t-2\right)e^{-2t}\ dt \\ \int -\frac{1}{3}\left(4t+1\right)e^{-2t}\ dt \end{pmatrix} \begin{matrix} (I) \\ (II) \\ (III) \end{matrix}$$

Recordamos el resultado de la siguiente integral:

$$\int (at^2+bt+c)e^{ft}\ dt = \frac{1}{f}e^{ft}\left(at^2+\left(-\frac{2a}{f}+b\right)t+\left(\frac{2a}{f^2}-\frac{b}{f}+c\right)\right)+C$$

De esta forma, tenemos que:

$$I = \int \frac{1}{9}\left(-2t+1\right)e^{t}\ dt = \frac{1}{9}e^{t}\left(3-2t\right)+C_I$$

$$II = \int \frac{1}{9}\left(12t^2+7t-2\right)e^{-2t}\ dt = -\frac{1}{18}e^{-2t}\left(12t^2+19t+\frac{15}{2}\right)+C_{II}$$

$$III = \int -\frac{1}{3}\left(4t+1\right)e^{-2t}\ dt = \frac{1}{6}e^{-2t}\left(4t+3\right)+C_{III}$$

Así, tenemos que el vector $\vec{F}$ es:

$$\vec{F} = \int \vec{F'}\,dt = \begin{pmatrix} \dfrac{1}{9}e^{t}\left(3-2t\right) \\ -\dfrac{1}{18}e^{-2t}\left(12t^2+19t+\dfrac{15}{2}\right) \\ \dfrac{1}{6}e^{-2t}\left(4t+3\right) \end{pmatrix}$$

Finalmente, la solución particular es:

$$\vec{X_p} = \Psi\vec{F}$$

$$\vec{X_p} = \begin{pmatrix} -3e^{-t} & 0 & -e^{2t} \\ 4e^{-t} & -e^{2t} & -(1+t)e^{2t} \\ 2e^{-t} & e^{2t} & te^{2t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dfrac{1}{9}e^{t}\left(3-2t\right) \\ -\dfrac{1}{18}e^{-2t}\left(12t^2+19t+\dfrac{15}{2}\right) \\ \dfrac{1}{6}e^{-2t}\left(4t+3\right) \end{pmatrix}$$

$$\vec{X_p} = \begin{pmatrix} -\dfrac{3}{2} \\ \dfrac{1}{4}\left(5-4t\right) \\ \dfrac{1}{4}\left(1-4t\right) \end{pmatrix}$$

Finalmente, la solución al SEDLNHCCC es:

$$\boxed{\vec{X_g} = \vec{X_h} + \vec{X_p}}$$

$$\boxed{\vec{X_h} = C_1e^{-t}\begin{pmatrix} -3 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} + C_2e^{2t}\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + C_3e^{2t}\begin{pmatrix} -1 \\ -1-t \\ t \end{pmatrix}}$$

$$\boxed{\vec{X}_p = \begin{pmatrix} -\dfrac{3}{2} \\ \dfrac{1}{4}(5-4t) \\ \dfrac{1}{4}(1-4t) \end{pmatrix}}$$

34. *Resuelva el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales, con $x, y, z = f(t)$:*

$$\vec{X}' = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \vec{X} + \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Solución: Como se puede evidenciar, se tiene un SEDLNHCCC. Por ende, debemos hallar la solución homogénea y particular. Calculamos la solución homogénea:

Calculamos los autovalores asociados a la matriz A

$$P(\lambda) = |A - \lambda I_{3x3}| = 0 \Longrightarrow P(\lambda) = \begin{vmatrix} 3-\lambda & 1 & 0 \\ -1 & 1-\lambda & 0 \\ 1 & 1 & 2-\lambda \end{vmatrix}$$

$$P(\lambda) = (2-\lambda) \begin{vmatrix} 3-\lambda & 1 \\ -1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)\left((3-\lambda)(1-\lambda)+1\right) = (2-\lambda)(\lambda^2-4\lambda+4) = (2-\lambda)(\lambda-2)^2$$

$$P(\lambda) = (2-\lambda)^3 \Longrightarrow \lambda_{1,2,3} = 2$$

Resulta que el único autovalor asociado a la matriz A es $\lambda = 2$ con una multiplicidad algebráica igual a 3. Procederemos a calcular los autovectores asociados a dicho autovalor Para $\lambda = 2$, tenemos que los autovectores asociados son:

$$(A - 2I_{3x3})\vec{K} = \vec{0} \Longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \\ k_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Se ve claramente que las dos últimas filas son combinación lineal de la primera. Por lo tanto, tenemos las siguientes restricciones del autovector $\vec{K}$

$$\Longrightarrow k_1 + k_2 = 0 \Longrightarrow k_1 = -k_2$$

Luego, el espacio de solución es:

$$V_2 = \left\{ \vec{K} = \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \\ k_3 \end{pmatrix} : \vec{K} = \begin{pmatrix} -k_2 \\ k_2 \\ k_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} k_2 + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} k_3 \quad k_2\ , k_3 \in \mathbb{R} - \{0\} \right\}$$

$$V_2 = \text{gen} \left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

De esta forma, la primera y segunda solución del SEDLH es:

$$\vec{X}_1 = e^{\lambda_1 t} \vec{K}_1 = e^{2t} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\vec{X}_2 = e^{\lambda_2 t} \vec{K}_2 = e^{2t} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Como la dimensión del espacio V_2 es $\dim V_2 = 2 < 3$, lo que quiere decir que la multiplicidad algebráica y geométrica del autovalor en cuestión no es igual. Por ende, es necesario construir una solución que sea linealmente independiente con $\vec{X}_1$ y $\vec{X}_2$ y satisfaga el SEDLH, es decir $\vec{X'} = A\vec{X}$. Así, se propone la siguiente solución:

$$\vec{X}_3 = (\vec{P} + t\vec{K})e^{2t}$$

Luego, debe satisfacer el SEDLH. Por ende:

$$\vec{X}_3' = (2\vec{P} + 2t\vec{K} + \vec{K})e^{2t} = \left[(2\vec{P} + \vec{K}) + t(2\vec{K}) \right] e^{2t}$$

$$\vec{X}_3' = A\vec{X}_3 \Longrightarrow \left[(2\vec{P}+\vec{K})+t(2\vec{K})\right]e^{2t} = A(\vec{P}+t\vec{K})e^{2t} \Longrightarrow (2\vec{P}+\vec{K})+t(2\vec{K}) = A\vec{P}+tA\vec{K}$$

Igualando término a término:

$$\begin{cases} 2\vec{P}+\vec{K} = A\vec{P} \\ \\ 2\vec{K} = A\vec{K} \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} (A-2I_{3x3})\vec{P} = \vec{K} \\ \\ (A-2I_{3x3})\vec{K} = \vec{0} \end{cases}$$

De la segunda ecuación se determina que el vector $\vec{K}$ no es otra cosa que un autovector asociado al autovalor $\lambda = 2$. Es decir, $\vec{K} \in V_2$. Por ende, $\vec{K}$ es una combinación lineal de los vectores que generan al espacio de solución V_2. Para el caso en donde solo exístia un vector del espacio generado de la solución, es evidente que el vector $\vec{K}$ fuese nada más el producto de una constante arbitraria distinta de cero por el vector generador del espacio solución. De esta forma, no podemos asegurar la expresión del vector $\vec{K}$ ya que va a resultar en una combinación lineal de ambos vectores generadores del espacio. La primera ecuación nos dará la segunda condición necesaria para determinar la forma del vector $\vec{K}$. Así:

$$(A-2I_{3x3})\vec{P} = \vec{K} \Longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ \\ -1 & -1 & 0 \\ \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_1 \\ \\ p_2 \\ \\ p_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k_1 \\ \\ k_2 \\ \\ k_3 \end{pmatrix}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & k_1 \\ \\ -1 & -1 & 0 & k_2 \\ \\ 1 & 1 & 0 & k_3 \end{array}\right] \xrightarrow[F_1 \to F_1+F_2]{F_3 \to F_3+F_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 0 & k_1+k_2 \\ \\ -1 & -1 & 0 & k_2 \\ \\ 0 & 0 & 0 & k_3+k_2 \end{array}\right]$$

Veamos que se obtienen las siguientes condiciones a satisfacer de la primera y última fila:

$$\begin{cases} k_1+k_2 = 0 \\ \\ k_3+k_2 = 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} k_1 = -k_2 \\ \\ k_3 = -k_2 \end{cases}$$

Así, la familia de vectores $\vec{K} \in V_2$ que satisfacen dichas condiciones es:

$$\vec{K} = \begin{pmatrix} k_1 \\ \\ k_2 \\ \\ k_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -k_2 \\ \\ k_2 \\ \\ -k_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ \\ 1 \\ \\ -1 \end{pmatrix} k_2 \quad k_2 \in \mathbb{R} - \{0\}$$

Observemos que la familia de vectores obtenida es simplemente la suma algebráica de los dos vectores generadores del espacio de solución V_2. Así, escogemos el vector $\vec{K}$ a nuestra conveniencia:

$$\vec{K} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Luego, volviendo al cálculo del vector $\vec{P}$, tenemos que:

$$p_1 + p_2 = 1 \Longrightarrow p_2 = 1 - p_1$$

Luego, la familia de vectores $\vec{P}$ que satisface la igualdad anterior es:

$$E_{\vec{P}} = \left\{ \vec{P} = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix} : \vec{p} = \begin{pmatrix} p_1 \\ 1 - p_1 \\ p_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} p_1 + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} p_3 + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \; p_1 \, , \, p_3 \in \mathbb{R} \right\}$$

De esta forma, escogemos el vector $\vec{P}$ más sencillo de todos. Fijando $p_1 = p_3 = 0$, tenemos que:

$$\vec{P} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Así, la solución construida tiene la siguiente expresión:

$$\vec{X_3} = (\vec{P} + t\vec{K})e^{2t} = \left[\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right] e^{2t} = \begin{pmatrix} t \\ 1 - t \\ t \end{pmatrix} e^{2t}$$

De esta forma, se tiene la posible matriz fundamental del sistema:

$$\Psi(t) = \begin{pmatrix} -e^{2t} & 0 & te^{2t} \\ e^{2t} & 0 & (1-t)e^{2t} \\ 0 & e^{2t} & te^{2t} \end{pmatrix}$$

Determinamos si la solución es LI (Linealmente Independiente). Para ello, hallamos el Wronskiano en cualquier valor de t. Escogemos $t = 0$, asumiendo que se encuentra en el rango I de solución. Así:

$$W(t=0) = \begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$$

Por lo tanto, las tres soluciones encontradas son LI. Por ende, $\Psi(t)$ corresponde a la matriz fundamental del SEDLH, tal que:

$$\vec{X}_h = \Psi(t)\vec{C} \quad \text{con} \quad \vec{C} = \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \end{pmatrix}$$

Así, la solución homogénea es:

$$\vec{X}_h = C_1 e^{2t} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + C_2 e^{2t} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + C_3 e^{2t} \begin{pmatrix} t \\ 1-t \\ t \end{pmatrix}$$

Luego, debemos calcular la solución particular del SEDLNH. Para ello, debemos hallar la inversa de la matriz fundamental Ψ

$$\Psi(t) = \begin{pmatrix} -e^{2t} & 0 & te^{2t} \\ e^{2t} & 0 & (1-t)e^{2t} \\ 0 & e^{2t} & te^{2t} \end{pmatrix}$$

$$\Longrightarrow \Psi^{-1} = e^{-2t} \begin{pmatrix} t-1 & t & 0 \\ -t & -t & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Luego, hallamos la matriz $\vec{F'} = \Psi^{-1}\vec{G}$:

$$\vec{F'} = e^{-2t}\begin{pmatrix} t-1 & t & 0 \\ -t & -t & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\vec{F'} = \begin{pmatrix} (-2t+2)e^{-2t} \\ (2t+1)e^{-2t} \\ -2e^{-2t} \end{pmatrix}$$

Así, hallamos la antiderivada del vector $\vec{F'(t)}$:

$$\vec{F} = \int \vec{F'}\ dt = \begin{pmatrix} \displaystyle\int (-2t+2)e^{-2t}\ dt \\ \displaystyle\int (2t+1)e^{-2t}\ dt \\ \displaystyle\int -2e^{-2t}\ dt \end{pmatrix} \begin{matrix} (I) \\ (II) \\ (III) \end{matrix}$$

Recordamos el resultado de la siguiente integral:

$$\int (at+b)e^{ct}\ dt = \frac{1}{c}e^{ct}\left(at - \frac{a}{c} + b\right) + C$$

De esta forma, tenemos que:

$$I = \int (-2t+2)e^{-2t}\ dt = e^{-2t}\left(t - \frac{1}{2}\right) + C_I$$

$$II = \int (2t+1)e^{-2t}\ dt = -e^{-2t}(t+1) + C_{II}$$

$$III = \int -2e^{-2t}\ dt = e^{-2t} + C_{III}$$

Así, tenemos que el vector $\vec{F}$ es:

$$\vec{F} = \int \vec{F}' \, dt = \begin{pmatrix} e^{-2t}\left(t - \dfrac{1}{2}\right) \\ -e^{-2t}(t+1) \\ e^{-2t} \end{pmatrix}$$

Finalmente, la solución particular es:

$$\vec{X_p} = \Psi \vec{F}$$

$$\vec{X_p} = \begin{pmatrix} -e^{2t} & 0 & te^{2t} \\ e^{2t} & 0 & (1-t)e^{2t} \\ 0 & e^{2t} & te^{2t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{-2t}\left(t - \dfrac{1}{2}\right) \\ -e^{-2t}(t+1) \\ e^{-2t} \end{pmatrix}$$

$$\vec{X_p} = \begin{pmatrix} \dfrac{1}{2} \\ \dfrac{1}{2} \\ -1 \end{pmatrix}$$

Finalmente, la solución al SEDLNHCCC es:

$$\boxed{\vec{X_g} = \vec{X_h} + \vec{X_p}}$$

$$\boxed{\vec{X_h} = C_1 e^{2t} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + C_2 e^{2t} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + C_3 e^{2t} \begin{pmatrix} t \\ 1-t \\ t \end{pmatrix}}$$

$$\boxed{\vec{X_p} = \begin{pmatrix} \dfrac{1}{2} \\ \dfrac{1}{2} \\ -1 \end{pmatrix}}$$

Es importante notar que las soluciones particulares de cada SEDLNHCCC deben corresponder a la forma del vector $\vec{G}$. Veamos que para este ejercicio resultó ser que el vector $\vec{G}$ estaba compuesto de polinomios de grado igual a cero. Por ende, la solución particular debe ser combinación lineal, así como el método de coeficientes indeterminados para EDLNHCCC, de este vector $\vec{G}$. De esta forma, podemos verificar que nuestra solución al menos cumple con la forma esperada por el procedimiento de cálculo.

35. *Resuelva el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales, con $x, y, z = f(t)$:*

$$\vec{X}' = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \vec{X} + \begin{pmatrix} -1 \\ -1 - e^{-t} \\ -2e^{-t} \end{pmatrix}$$

Solución: Calculamos los autovalores asociados a la matriz A

$$P(\lambda) = |A - \lambda I_{3x3}| = 0 \Longrightarrow P(\lambda) = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 1 \\ 1 & -\lambda & 1 \\ 1 & 1 & -\lambda \end{vmatrix}$$

$$P(\lambda) = -\lambda \begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ 1 & -\lambda \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -\lambda \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & -\lambda \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -\lambda\left(\lambda^2 - 1\right) - (-\lambda - 1) + (1 + \lambda)$$

$$P(\lambda) = -\lambda(\lambda - 1)(\lambda + 1) + (\lambda + 1) + (\lambda + 1) = (\lambda + 1)(-\lambda^2 + \lambda + 2) = -(\lambda + 1)(\lambda + 1)(\lambda - 2)$$

$$P(\lambda) = (2 - \lambda)(\lambda + 1)^2 \Longrightarrow \lambda_{1,2} = -1 \quad \lambda_3 = 2$$

Para $\lambda = -1$, tenemos que los autovectores asociados son:

$$(A + I_{3x3})\vec{K} = \vec{0} \Longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \\ k_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Se ve claramente que las dos últimas filas son combinación lineal de la primera. Por lo tanto, tenemos las siguientes restricciones del autovector $\vec{K}$

$$\Longrightarrow k_1 + k_2 + k_3 = 0 \Longrightarrow k_1 = -k_2 - k_3$$

Luego, el espacio de solución es:

$$V_{-1} = \left\{ \vec{K} = \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \\ k_3 \end{pmatrix} : \vec{K} = \begin{pmatrix} -k_2 - k_3 \\ k_2 \\ k_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} k_2 + \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} k_3 \quad k_2\ , k_3 \in \mathbb{R} - \{0\} \right\}$$

$$V_{-1} = \text{gen} \left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

De esta forma, la primera y segunda solución del SEDLH es:

$$\vec{X_1} = e^{\lambda_1 t} \vec{K_1} = e^{-t} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\vec{X_2} = e^{\lambda_2 t} \vec{K_2} = e^{-t} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Veamos que la dimensión del espacio V_{-1} es $\dim V_{-1} = 2$; es decir, la multiplicidad geométrica del autovalor es igual a 2. Por ende, la multiplicidad geométrica y la multiplicidad algebráica (también igual a 2) coinciden. De esta forma, concluimos que no es necesario realizar la construcción de otras soluciones

Para $\lambda = 2$, tenemos que los autovectores asociados son:

$$(A - 2I_{3x3})\vec{K} = \vec{0} \Longrightarrow \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \\ k_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{bmatrix} \xrightarrow{F_1 \to -\frac{1}{2}F_1} \begin{bmatrix} 1 & -\dfrac{1}{2} & -\dfrac{1}{2} \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{bmatrix} \xrightarrow[F_3 \to F_3 - F_1]{F_2 \to F_2 - F_1} \begin{bmatrix} 1 & -\dfrac{1}{2} & -\dfrac{1}{2} \\ 0 & -\dfrac{3}{2} & \dfrac{3}{2} \\ 0 & \dfrac{3}{2} & -\dfrac{3}{2} \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow[F_3 \to F_3 + F_2]{F_1 \to F_1 - \frac{1}{3}F_2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & -\dfrac{3}{2} & \dfrac{3}{2} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{F_2 \to -\frac{2}{3}F_2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Se obtinen las siguientes condiciones a satisfacerse:

$$\begin{cases} k_1 - k_3 = 0 \Longrightarrow k_1 = k_3 \\ k_2 - k_3 = 0 \Longrightarrow k_2 = k_3 \end{cases}$$

Luego, el espacio de solución es:

$$V_2 = \left\{ \vec{K} = \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \\ k_3 \end{pmatrix} : \vec{K} = \begin{pmatrix} k_3 \\ k_3 \\ k_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} k_3 \quad k_3 \in \mathbb{R} - \{0\} \right\}$$

$$V_2 = \text{gen}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

De esta forma, la última solución del SEDLH es:

$$\vec{X}_3 = e^{\lambda_3 t}\vec{K}_3 = e^{2t} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Así se tiene la posible matriz fundamental del sistema:

$$\Psi(t) = \begin{pmatrix} -e^{-t} & -e^{-t} & e^{2t} \\ e^{-t} & 0 & e^{2t} \\ 0 & e^{-t} & e^{2t} \end{pmatrix}$$

Determinamos si la solución es LI (Linealmente Independiente). Para ello, hallamos el Wronskiano en $t = 0$. Así:

$$W(t=0) = \begin{vmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 3 \neq 0$$

Por lo tanto, las tres soluciones encontradas son LI. Por ende, $\Psi(t)$ corresponde a la matriz fundamental del SEDLH, tal que:

$$\vec{X_h} = \Psi(t)\vec{C} \quad \text{con} \quad \vec{C} = \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \end{pmatrix}$$

Así, la solución homogénea es:

$$\vec{X_h} = C_1 e^{-t} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + C_2 e^{-t} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + C_3 e^{2t} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Luego, debemos calcular la solución particular del SEDLNH. Para ello, debemos hallar la inversa de la matriz fundamental Ψ

$$\Psi^{-1} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -e^{t} & 2e^{t} & -e^{t} \\ -e^{t} & -e^{t} & 2e^{t} \\ e^{-2t} & e^{-2t} & e^{-2t} \end{pmatrix}$$

Luego, hallamos la matriz $\vec{F'} = \Psi^{-1}\vec{G}$:

$$\vec{F'} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -e^t & 2e^t & -e^t \\ -e^t & -e^t & 2e^t \\ e^{-2t} & e^{-2t} & e^{-2t} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 \\ -1 - e^{-t} \\ -2e^{-t} \end{pmatrix}$$

$$\vec{F'} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -e^t \\ 2e^t - 3 \\ -3e^{-3t} - 2e^{-2t} \end{pmatrix}$$

Así, hallamos la antiderivada del vector $\vec{F'(t)}$:

$$\vec{F} = \int \vec{F'}\ dt = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} \int -e^t\ dt \\ \displaystyle\int 2e^t - 3\ dt \\ \displaystyle\int -3e^{-3t} - 2e^{-2t}\ dt \end{pmatrix} \begin{matrix} (I) \\ (II) \\ (III) \end{matrix}$$

De esta forma, tenemos que:

$$I = \int -e^t\ dt = -e^t + C_I$$

$$II = \int 2e^t - 3\ dt = 2e^t - 3t + C_{II}$$

$$III = \int -3e^{-3t} - 2e^{-2t}\ dt = e^{-3t} + e^{-2t} + C_{III}$$

Así, tenemos que el vector $\vec{F}$ es:

$$\vec{F} = \int \vec{F'}\ dt = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -e^t \\ 2e^t - 3t \\ e^{-3t} + e^{-2t} \end{pmatrix}$$

Finalmente, la solución particular es:

$$\vec{X}_p = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -e^{-t} & -e^{-t} & e^{2t} \\ e^{-t} & 0 & e^{2t} \\ 0 & e^{-t} & e^{2t} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -e^{t} \\ 2e^{t}-3t \\ e^{-3t}+e^{-2t} \end{pmatrix}$$

$$\vec{X}_p = \begin{pmatrix} \left(t+\frac{1}{3}\right)e^{-t} \\ \frac{1}{3}e^{-t} \\ 1+\left(\frac{1}{3}-t\right)e^{-t} \end{pmatrix}$$

Finalmente, la solución al SEDLNHCCC es:

$$\boxed{\vec{X}_g = \vec{X}_h + \vec{X}_p}$$

$$\boxed{\vec{X}_h = C_1e^{-t}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + C_2e^{-t}\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + C_3e^{2t}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}}$$

$$\boxed{\vec{X}_p = \begin{pmatrix} \left(t+\frac{1}{3}\right)e^{-t} \\ \frac{1}{3}e^{-t} \\ 1+\left(\frac{1}{3}-t\right)e^{-t} \end{pmatrix}}$$